Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 63

Universität Rostock

Institut für Mathematik

2008

Herausgeber:	Universität Rostock Mathematisch – Naturwissenschaftliche Fakultät Institut für Mathematik
Wissenschaftlicher Beirat:	Hans-Dietrich Gronau Friedrich Liese Peter Takáč Günther Wildenhain
Schriftleitung:	Raimond Strauß
Herstellung der Druckvorlage:	Susann Dittmer

Zitat–Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. **63** (2008)

ISSN 0138-3248

BEZUGSMÖGLICHKEITEN:	Universität Rostock Universitätsbibliothek, Schriftentausch 18051 Rostock Tel.: +49-381-498 22 81 Fax: +49-381-498 22 68 e-mail: maria.schumacher@ub.uni-rostock.de
	Universität Rostock Institut für Mathematik 18051 Rostock Tel.: +49-381-498 6551 Fax: +49-381-498 6553 e-mail: romako@uni-rostock.de
DRUCK:	Universitätsdruckerei Rostock

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 3–24 (2008)

Subject Classification (AMS)
00A06, 11A55, 85A99

Klaus-Dieter Drews

Mathematatische Aspekte im Werk der Astronomischen Uhr von St. Marien zu Rostock

Die monumentale Uhr aus dem Jahre 1472 zeigt in ihrem oberen Teil, einem prächtig gestalteten zweimal 12stündigen römischen Zifferblatt, neben der Tageszeit, auf die der Stundenzeiger weist, auch den Lauf der Sonne und des Mondes durch den Tierkreis an.

Astronomische Uhr in St. Marien, oberer Teil, 6.8.2007 15 Uhr

In der Nähe der Enden des Stundenzeigers befinden sich ferner die ‚Planetenstunden'-Scheibe (HORAS PLANETARUM), deren Zeiger auf den jeweiligen Stundenregenten, abhängig vom Wochentag, weist, sowie am gegenüberliegenden Ende die sogenannte Sebes-Scheibe, an deren 24stündigem Ziffernfeld nochmals auf die Tagesstunde gewiesen wird.

Im unteren Teil der Uhr wird an der großen Kalenderscheibe das Tagesdatum angezeigt, aber es befinden sich auf dieser Scheibe zahlreiche weitere Angaben. Für Einzelheiten hierüber sowie aus der Geschichte der Uhr sei verwiesen auf die Publikationen [12], [13] von Herrn M. Schukowski, dessen große Verdienste um die Uhr sich schon über Jahrzehnte erstrecken.

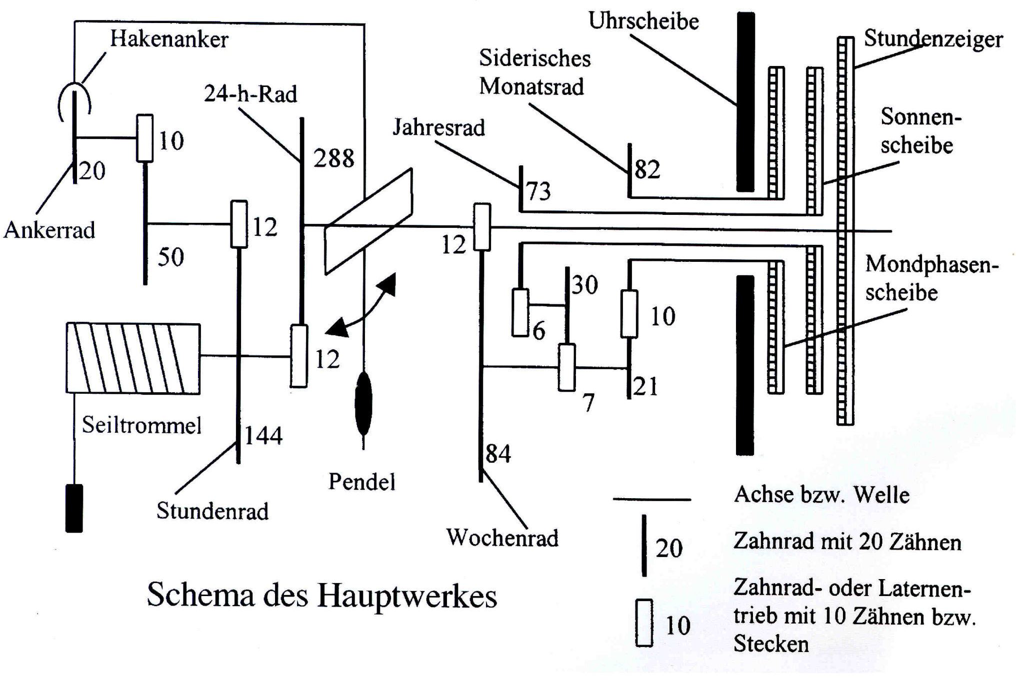
Erwähnt werden müssen der mittägliche (und mitternächtliche) Apostelumgang, vorbei an einer segnenden Christusfigur, sowie das Musikwerk, durch das stündlich stets weihevoll als Glockenspiel eine (nahezu beliebig einzugebende) Choralmelodie erklingt.

Astronomische Uhr in St. Marien, 22.8.2007 15 Uhr

Wenn sich Scharen von Besuchern an der Uhr und deren Anzeigen erfreuen, und wenn diese in Gänze oder doch im wesentlichen wahrgenommen werden, so beruht das Zutreffen der Anzeigen auf glänzenden Konzeptionen. Dennoch muß der Uhr geholfen werden, weil es zunehmende Abweichungen vor allem in der Mondanzeige gäbe, wenn die Einstellung nicht von

Zeit zu Zeit korrigiert würde. Gerade hierzu werden nachfolgend das Zahnräderwerk der Uhr analysiert, Approximationen der Anzeigen an die naturgegebenen Verhältnisse beurteilt und daraus Vorschläge für Einstellungskorrekturen über einen längeren Zeitraum abgeleitet, Untersuchungen und Einsichten, die sich in der bisherigen Literatur zur Uhr nicht finden. Hinzu kommt ein Blick auf die Planetenstunden-Scheibe und ihre nach mehr als $1^1/_2$ Jahrhunderten letztendlich angepaßte Funktionsweise.

Für die Symbole der Sonne und des Mondes an der Uhr, die ja den Lauf der Himmelskörper modellieren, verwende ich die Benennungen *Modell-Sonne* bzw. *Modell-Mond*. Genauer ist das Sonnensymbol am Rand einer sich drehenden Scheibe befestigt, der oben liegenden Sonnenscheibe mit einem kreisförmigen Ausschnitt. In diesem Ausschnitt werden Mondphasen sichtbar, wechselnd bedeckte Mondgesichter, mit denen eine zweite, darunterliegende Scheibe bemalt und an deren Rand das Mondsymbol befestigt ist. Beide Scheiben drehen sich konzentrisch mit dem Stundenzeiger aber entgegengesetzt zu ihm linksherum.



Aus [13], *mit freundlicher Erlaubnis des Autors*

1 Die Modell-Sonne

Ausgangspunkt für den Lauf des Uhrwerkes ist ein Pendel mit der Schwingungsdauer 3s, das über Ankerhaken ein 20zinkiges (angetriebenes) Steigrad hemmt, welches somit genau eine volle Umdrehung pro Minute vollführt, kurz 1 Drehung pro Minute, d.h. $60 \cdot 24$ Drehungen pro Tag (d). Durch drei nachfolgende Übersetzungen mit den Zahnradverhältnissen $\frac{10}{50}$, $\frac{12}{144}$, $\frac{12}{288}$ werden diese Drehungen (wegen $60 \cdot 24 \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{12}{144} \cdot \frac{12}{288} = 1$) zu 1 Drehung pro Tag oder eben $\frac{360°}{1d}$ auf die Achse des Stundenzeigers übertragen, der sich wie erwähnt über ein zweimal 12stündiges Zifferblatt bewegt. Von der Achse des Stundenzeigers wird im Verhältnis $\frac{12}{84}\left(=\frac{1}{7}\right)$ die Bewegung des *Wochenrades* gewonnen, das sich somit um $\frac{360°}{7d}$ dreht. Von der Achse des Wochenrades nun werden sowohl die Bewegung der Modell-Sonne als auch die des Modell-Mondes abgenommen. Für die Achse der Modell-Sonne ergibt sich mit den nacheinanderfolgenden Übersetzungsverhältnissen $\frac{7}{30}$, $\frac{6}{73}$, daß sie sich um $\frac{7}{30}\cdot\frac{6}{73}\cdot\frac{360°}{7d}$ dreht, d.h. um $\frac{360°}{365d}$.

Einsicht 1 *Die Modell-Sonne vollführt in Normaljahren mit* 365 *Tagen genau einen Umlauf. In Schaltjahren wandert sie unjustiert um einen Tag (knapp ein Grad) zu weit.*

2 Der Modell-Mond

2.1 Gegebene Konstanten

Die Drehbewegung der Achse des Wochenrades wird durch Zahnräder im Verhältnis $\frac{21}{82}$ auf die Achse des Modell-Mondes übertragen:

Einsicht 2 *Der Modell-Mond dreht sich um* $\frac{21}{82}\cdot\frac{360°}{7d}$*, d.h. pro Tag um* $\frac{3}{82}\cdot 360°$ *oder um* 3 *Zähne seines* 82*er-Rades.*

Zwischen die Zahnräder mit 21 bzw. 82 Zähnen ist noch eins mit 10 Zähnen (Stecken) geschaltet, das für die Übersetzungsverhältnisse, die uns interessieren, ganz unwesentlich ist. Aber erstens kehrt dieses Rad den Drehsinn sinnvoll nochmals um, und zweitens befindet sich genau hier die Stelle – im Jahr 2000 lange vergeblich gesucht, schließlich im Januar 2001 wiederentdeckt von den Herren U. Nath, Pastor em., und H. Süß, seinerzeit tätig an hiesiger Universitätsbibliothek – wo man den Modell-Mond entkoppeln kann, um ihn unabhängig vom übrigen Werk neu zu justieren.

Was aber bedeutet das Verhältnis $\frac{21}{82}$? Im nachstehenden Teilabschnitt 2.2 erfolgt eine Interpretation und Würdigung, in 2.3 und dann in 4 werden Schlußfolgerungen gezogen.

Zunächst aber ein Blick auf den zugrundeliegenden Lauf des Naturmondes. Als Konstante für den *synodischen* Monat (Mond), der Zeitspanne zwischen zwei gleichen Mondphasen, sie sei hier mit b bezeichnet, gilt $b = 29,530\,588\,853d$ $(= 29d\,12h\,44m\,2,87\ldots s)$, in der größten Genauigkeit aus der hier betrachteten Literatur.

Es handelt sich bei b allerdings um einen Durchschnittswert, in Wahrheit bewegt sich der Naturmond nicht so regelmäßig, seine Erdumlaufbahn ist das Resultat zahlreicher Einflüsse, sie ist „die komplizierteste im ganzen Sonnensystem und dementsprechend vielfältig sind die Rhythmen, die sich in der Mondbewegung überlagern“ ([14] S. 195). Für die Schwankungen der *Lunationen*, das sind die tatsächlichen Zeitspannen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden, wollen wir, zumindest qualitativ, sogleich noch Gründe einsehen.

In [7] Kap. 47 wird ein Algorithmus zur Berechnung der Mondphasen präsentiert, der auf „neuer Mondtheorie“ und „Theorie für die Sonne“ beruht, dort findet sich der zitierte Wert von b als Anfangskoeffizient. Die diversen im Algorithmus zu bestimmenden Summanden entziehen sich zunächst überwiegend einer anschaulichen Interpretation, geben jedoch einen Eindruck vom Endpunkt der Geschichte zur Entwicklung genauer Bewegungsbeschreibungen seit den Anfängen vor Tausenden von Jahren bis ins 20. Jahrhundert, wie sie faszinierend in [10] Kap. 6 geschildert wird. Man mußte abkommen davon, Ellipsenbahnen an den Anfang zu stellen, sondern mit „speziellen einfachen Lösungen des Dreikörperproblems“ beginnen, um den Einfluß der Sonne gebührend zu berücksichtigen, und dann „zusätzliche Schwankungen und Verschiebungen überlagern“ (nach [10] S. 164).

Für die beabsichtigten qualitativen Einsichten allerdings beziehen wir uns allein auf die KEPLERschen Gesetze. Wichtig werden die *Apsiden* von Erde und Mond, d.h. *Aphel* und *Perihel*, Sonnenferne bzw. -nähe der elliptischen Erdbahn, sowie *Apogäum* und *Perigäum*, Erdferne bzw. -nähe der elliptischen Mondbahn. In je einer Lunation geschieht zunächst konstant

> ein voller Umlauf des Mondes bez. der Erde um den Polarwinkel 360°
> in $27d\,7h\,43m\,11,6s$ ([4] S. 51), dem konstanten *siderischen* Monat.

Hinzu kommt durch die inzwischen erfolgte Weiterbewegung der Erde um einen Polarwinkel $\triangle\varepsilon$ auf ihrer Bahn bez. der Sonne

> ein weiteres Bahnstück $\triangle\mu$ für den Mond, das er zurücklegen muß, um wieder
> die erforderliche Neumondstellung zwischen Erde und Sonne zu erreichen
> (währenddessen $\triangle\varepsilon$ noch etwas zunimmt).

Nach dem zweiten KEPLERschen Gesetz ist in der Nähe des Aphels der Erde bei konstantem siderischen Monat das $\triangle\varepsilon$ kleiner, dagegen in der Nähe des Perihels größer, jeweils als der Durchschnitt. Diese Verhältnisse übertragen sich unmittelbar auf das genannte Bahnstück $\triangle\mu$ für den Mond.

Liegt die Neumondstellung nun außerdem in der Nähe der Apsiden des Mondes, und zwar das kleinere $\triangle\mu$ beim Perigäum, so ist nach demselben KEPLERschen Gesetz die benötigte Zeit für $\triangle\mu$ noch zusätzlich verkürzt, hingegen ist für das größere $\triangle\mu$ beim Apogäum des Mondes die benötigte Zeit zusätzlich verlängert. Somit resultieren für Neumondstellungen

> beim Perigäum im Aphel (Sommer auf der nördlichen Hemisphäre) relativ kurze und
> beim Apogäum im Perihel (Winter) relativ lange Lunationen.

Aphel und Perihel fallen im übrigen nicht auf die Sonnenwenddaten, sie liegen erst Anfang Juli bzw. Januar.

In erwähntem [7] werden auf S. 354 als absolute Extrema für den Zeitraum 1900 bis 2100 kürzeste Lunationen von $29d\ 6h\ 35m$ (bis zum Neumond am 24.7.1903 und am 15.7.2053) sowie eine längste von $29d\ 19d\ 55m$ (bis zum Neumond am 23.1.1974) angegeben, das sind Abweichungen vom Wert b um mehr als $6h$ bzw. $7h$.

Nachrechnungen [16] lassen relative Extrema analog erkennen, auch für den Vollmond, auf den sich die qualitativen Erörterungen leicht übertragen. Periodizitäten sind nicht zu erwarten, denn z.B. dreht sich die Apsidenlinie (große Achse) der Mondbahn in ca. 8,85 Jahren einmal voll in Laufrichtung des Mondes ([4] S. 51), so daß Neumondstellungen bei den Apsiden der Erdbahn von Jahr zu Jahr in andere Bereiche der Mondbahn fallen.

Solchen Schwankungen kann der Modell-Mond natürlich nicht gerecht werden. Er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, und die muß sich orientieren an der ‚Durchschnittskonstanten' b für den synodischen Monat. Hinzu kommt, daß zu gewissen Zeiten die wahren Lunationen mehrfach nacheinander z.B. kürzer als b ausfallen, erst weiter abnehmend, dann wieder ansteigend, und dabei summieren sich die Vorlaufszeiten des Neumondes gegenüber dem ‚Durchschnittslauf'. Für den Modell-Mond bedeutet dies, daß er sich dann jeweils (aus einem Vorsprung) am Ende zu relativ maximalem Rückstand verspätet. Analog erklären sich relativ maximale Vorausläufe sowie beides auch für den Vollmond; eine wesentliche Ergänzung aber erfolgt in Abschnitt 2.3.

Eine Näherung für b läßt sich bereits aus Erkenntnissen des Altertums gewinnen: Um das Jahr 432 v. Chr. entdeckte der Athener METON, daß 235 synodische Monde (recht gut) 19 Jahren entsprechen. Nimmt man das (spätere) Julianische Jahr von $365,25d$, so wird $19 \cdot 365,25d/235 = 6939,75d/235 = 29,53085\ldots d$; METON hatte seinerzeit $6940d$ in 19 Jahren.

Bei der Gregorianischen Reform 1582 wurde einerseits durch die seitherige Regel für den Wegfall von drei Schalttagen in 400 Jahren der Kalender besser an die Sonnenstellung im Tierkreis angepaßt, diese Korrektur verhindert eine ‚Abwanderung' des Datums 21.3. in Richtung Sommer. Außerdem aber wurde in der Reform der Lauf des Mondes genauer erfaßt und der Berechnung des Osterdatums weit in die Zukunft eingefügt, hier wirkt sich der genauere Wert b für den synodischen Mond aus, und darauf sei am Rande eingegangen.

Der erste Vollmond ab dem 21.3. (eingeschlossen) bestimmt die *Ostergrenze*, am Sonntag nach diesem Termin ist Ostern. Die Ostergrenze als spezielles Vollmonddatum wird für jedes Jahr formal (nicht direkt astronomisch) bestimmt, sie durchläuft 19jährige Zyklen, die mindestens für ein Jahrhundert unverändert bleiben.
(Zur Herleitung bzw. Präsentation der ‚GAUSSschen Osterformel' s. z.B. [1], [5].)

Die Abfolge der *Ostergrenzen* ist insoweit unabhängig vom Schaltjahrsstatus. Fällt nun allerdings gregorianisch in einem Säkularjahr ein Schalttag aus, so erhöhen sich (i. allg.) alle Daten der Ostergrenzen ab dann um einen Tag (der stets in den 18. „korrigierte" 19.4. wird zum 21.3.).

Für den Lauf von 235 synodischen Monden in 19 Jahren hat man heutzutage genauer $235 \cdot b - 19 \cdot 365,25d = 6939,688380\ldots d - 6939,75d = -0,061619...d$. Um (absolut) diese Zeitspanne tritt der 235. Vollmond nach 19 Jahren eher ein, seine Stellung im Tierkreis hat sich verändert, was zusätzlich zur eben genannten Korrektur der Ostergrenzen berücksichtigt werden muß.

Sieht man nun auf 2500 Jahre, so wird $2500 \cdot (-0,061619\ldots d)/19 = -8,1078\ldots d$, und daher müssen die Ostergrenzen in dieser Zeit um 8 Tage vorversetzt werden. Das erfolgt in der Gregorianischen Reform, unter einer Zwischenkorrektur bis zum Jahr 1800, für nachfolgende Zeiträume von je 2500 Jahren durch Vorversetzung der Ostergrenzen um je einen Tag 7mal nach je 300 Jahren, zuerst 2100, und dann einmal nach 400 Jahren, das ist 4300. (2100 aber wird diese Vorversetzung durch die Datumserhöhung wegen Ausfalls des Schalttages kalendarisch annulliert, so daß ‚unsere' ab 1900 geltenden Ostergrenzen noch bis 2199 unverändert bleiben. Unter ihnen fehlt der 21.3., daher ist der eigentlich früheste Ostertermin am 22.3. in diesen Zeiten unmöglich – zuletzt 1818, wieder 2285; aber 2008 ist immerhin am 23.3. Ostern – dann wieder 2160.)

Nach 10 solchen Perioden von 2500 Jahren hat sich der Mond jedoch, wie obige Rechnung zeigt, um $81d$ statt $80d$ verschoben, spätestens dann muß die Osterformel modifiziert werden. Dies muß sogar viel eher geschehen wegen des immer noch ungenauen Gregorianischen Jahres, $365,2425d$ statt $365,24219879d$ ([4] S. 41) im tropischen Jahr, mehr als $1d$ zu groß in 3400 Jahren, in solchem Zeitraum muß ein weiterer Kalendertag entfallen, wofür es noch keine Festlegung gibt – im Jahr 4000, wenn spekuliert werden darf. (Überlegungen zur Periodizität der Osterformel sind also müßig, wenn auch in [5] für sie die Minimalperiode von 5.700.000 Jahren bestimmt wird, ebenfalls angegeben in [7]; während dieser Zeitspanne wären aber der 21.3. und mit ihm Ostern zunächst in Richtung Sommer gewandert und dann sogar mehrfach durch alle Jahreszeiten.)

2.2 Eine Erklärung für das Übersetzungsverhältnis 21/82

Analog zur scheinbaren Bewegung in der Ekliptik kreisen an der Uhr Symbole von Mond und eben von Sonne. Der Betrachter schaut auf die Umlaufebene, wobei ihm zusätzlich Mondphasen angezeigt werden im eingangs erwähnten Ausschnitt der oberen Scheibe. Regelmäßig in einem synodischen Monat b, z.B. von einem Neumond zum nächsten, muß der Modell-Mond, genauso wie in der Beschreibung des vorigen Abschnitts für den Naturmond, einen vollen Umlauf von 360° und das Bahnstück $\triangle\mu$ zurücklegen, welches hier nun von der Weiterbewegung der Modell-Sonne herrührt.

Setzen wir für den Modell-Mond statt $\frac{21}{82}$ ein gesuchtes Übersetzungsverhältnis V an, so bewegt er sich im Zeitraum b nach Einsicht 2 um $b \cdot V \cdot \frac{360°}{7d}$, die Modell-Sonne hingegen nach

Einsicht 1 um $b \cdot \frac{360°}{365d}$, deshalb muß gelten

$$b \cdot V \cdot \frac{360°}{7d} = 360° + b \cdot \frac{360°}{365d}$$

und somit

$$V = 7 \cdot \left(\frac{1d}{b} + \frac{1}{365}\right) \qquad (= 0{,}2562204\ldots, \text{ dimensionslos}).$$

Statt vom synodischen könnte man zur Bestimmung von V evtl. einfacher auch vom siderischen Monat und dazu einem 360°-Umlauf des Modell-Mondes ausgehen. Synodische Monate sind durch die geläufigen Neu- und Vollmondstellungen sowie deren allgemein zugängliche Termine naheliegender und werden im folgenden zu Vergleichszwecken herangezogen.

Wegen des doch etwas komplizierten Wertes von b, und damit von V, sind nun gute Näherungsbrüche für V gesucht, Übersetzungsverhältnisse in nicht zu großen Zahlen, auch abseits der dezimalen Näherungen.

Ergebnisse hierzu liefert die Theorie der *Kettenbrüche* (z.B. in [9], z.T. in [15]).

Mit der für die weiteren Zwecke ausreichenden Genauigkeit (im Grunde der METONischen) $29,530d < b < 29,531d$ gilt $0,25620 < V < 0,25623$.

Wir bestimmen den Kettenbruch der kleineren Schranke $v := 0,2562 \left(= \frac{2562}{10000} = \frac{1281}{5000}\right)$:

$$v = \frac{1}{5000/1281} = \frac{1}{3 + 1157/1281} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1281/1157}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + 124/1157}} =$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1157/124}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + 41/124}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{124/41}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3 + \frac{1}{41}}}}}.$$

Gefunden sind somit die Zahlen $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 9$, $a_4 = 3$, $a_5 = 41$, die *Teilnenner* des Kettenbruchs für v. Errechnet wurden sie durch sukzessive Divisionen mit Rest entsprechend dem EUKLIDischen Algorithmus, und wir bestimmen über ihn auch die ersten Teilnenner von $v' := 0,25623 \left(= \frac{25623}{100000}\right)$, der größeren Schranke für V:

$$\begin{aligned} 100000 &= \underline{3} \cdot 25623 + 23131, \\ 25623 &= \underline{1} \cdot 23131 + 2492, \\ 23131 &= \underline{9} \cdot 2492 + 703, \\ 2492 &= \underline{3} \cdot 703 + 383. \end{aligned}$$

Die ersten vier Teilnenner 3, 1, 9, 3 von v' stimmen also mit a_1 bis a_4 von v überein (die weiteren für v' sind 1, 1, 5, 12, 1, 1, 2).

Man erhält für v und v' die *Hauptnäherungsbrüche* (in dieser Aufeinanderfolge)

$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3+\frac{1}{1}}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{9}}}=\frac{10}{39},\quad \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{9+\frac{1}{3}}}}=\frac{31}{121}.$$

Für die (eo ipso gekürzten) Brüche gilt $\frac{1}{4}<\frac{31}{121}<v<V<v'<\frac{10}{39}<\frac{1}{3}$, aber ferner:

(I) Jeder dieser Brüche p/q ist eine *beidseitig* ‚beste' Näherung von v (und von v'), d.h., alle beliebigen anderen Brüche, und zwar auf beiden Seiten von v (oder von v'), die mindestens so nahe an v (oder an v') liegen wie p/q, haben Nenner größer als q (nach [9] S. 46).

Außer den genannten Hauptnäherungen gibt es die *Nebennäherungsbrüche*. Sie werden aus beliebigen aufeinanderfolgenden Hauptnäherungsbrüchen p/q und r/s gebildet und liegen zwischen diesen: $\frac{p}{q}<\frac{p+c\cdot r}{\underline{\underline{q+c\cdot s}}}<\frac{r}{s}$ oder $\frac{r}{s}<\frac{p+c\cdot r}{\underline{\underline{q+c\cdot s}}}<\frac{p}{q}$ mit $0<c<a$;
ist hierin $\frac{r}{s}$ aus gewissen Teilnennern gewonnen worden, so bezeichnet a den drauffolgenden Teilnenner, und auch c sei ganzzahlig gewählt. Die Nebennäherungen liegen auf derselben Seite von v und v' wie $\frac{p}{q}$, und nähern sich v und v' mit wachsendem c.
($\frac{p+a\cdot r}{q+a\cdot s}$ ist die nächste Hauptnäherung.)
Für beliebige Näherungsbrüche von v und v' gilt (nach [9] S. 49-51):

(II) Jeder Bruch, der zwischen zwei in der Größe aufeinanderfolgenden Näherungen liegt (Haupt- und Nebennäherungen sind hier gemeint), hat einen größeren Nenner als die beiden Näherungen, er kommt somit als ‚beste' Näherung nicht in Frage.

(III) Wird eine Nebennäherung mit $c>a/2$ gebildet, so ist sie eine beidseitig ‚beste' Näherung von v (von v'). Bei $c<a/2$ ist sie nur einseitig ‚beste', auf der anderen Seite von v (von v') liegt r/s mit kleinerem Nenner näher.

Mit den Hauptnäherungen 10/39 und 31/121 erhält man beispielsweise:

$$\frac{31}{121}<v<\frac{10+c\cdot 31}{39+c\cdot 121}<\frac{10}{39},\quad 0<c<a_5=41\quad (\text{bei } c=a_5=41 \text{ entsteht } \frac{1281}{5000}=v).$$

Die Nenner dieser Nebennäherungen sind größer als 121, daraus folgt nach (II):

(IV) Zwischen v und $\frac{10}{39}$ liegen nur Brüche, deren Nenner größer als 121 sind.

Aus den Hauptnäherungen $1/4$ und $10/39$ folgt andererseits:

$$\frac{1}{4} < \frac{1 + c \cdot 10}{4 + c \cdot 39} < v < v' < \frac{10}{39}, \quad 0 < c < a_4 = 3 \quad (\text{bei } c = a_4 = 3 \text{ entsteht } \frac{31}{121}).$$

Für $c = 1$ ergibt sich die Nebennäherung $\frac{11}{43}$, die linksseitig näher an v liegt als $\frac{1}{4}$, rechtsseitig jedoch liegt wegen $c < a_4/2$ nach (III) $\frac{10}{39}$ (mit kleinerem Nenner) näher, eben als nach (I) beidseitig ‚beste' Näherung für v und v'.

$$\textit{Aber für } c = 2 \textit{ gewinnt man } \underline{\underline{\frac{21}{82}}}.$$

Nun gilt $\frac{21}{82} < \frac{31}{121} < v < V < v' < \frac{10}{39}$. Nach (III) ist $\frac{21}{82}$ wegen $c = 2 > a_4/2$ beidseitig ‚beste' Näherung von v und v', liegt somit näher als $\frac{10}{39}$. Nach (II) sind die Nenner aller Brüche zwischen $\frac{21}{82}$ und $\frac{31}{121}$ größer als 121, und mit (IV) folgt insgesamt (auch für V):

Einsicht 3 *Das Übersetzungsverhältnis* $\frac{21}{82}$ *für den Antrieb des Modell-Mondes ist so günstig gewählt, daß es näher am theoretisch gewünschten Verhältnis* V *liegt als alle Brüche auf beiden Seiten von* V *mit Nennern bis* 120.
Besser mit nächstgrößerem Nenner ist $\frac{31}{121}$ *und dies auch beiderseits von* V.

Beiläufig erwähnt werde noch $v < \frac{103}{402} < V < \frac{72}{281} < v'$, wobei zwischen v und v' die Nenner aller weiteren Brüche größer als 402 sind.

2.3 Bewertung von Abweichungen zwischen Modell-Mond und Naturmond

Den modellierten synodischen Mond b_M der Uhr bestimmen wir nun bei gegebenem Wert des Übersetzungsverhältnisses V aus der ersten Gleichung des vorigen Abschnittes 2.2:

$$b_M \cdot V \cdot \frac{360°}{7d} = 360° + b_M \cdot \frac{360°}{365d}.$$

Es wird

$$b_M = \frac{1}{\frac{V}{7} - \frac{1}{365}} d,$$

und für den Modellwert $21/82$ von V errechnet man

$$b_M = \frac{1}{\frac{21}{82 \cdot 7} - \frac{1}{365}} d = \frac{82 \cdot 365}{3 \cdot 365 - 82} d = \frac{29930}{1013} d, \text{ das sind } 29d\ 13h\ 6,1 \ldots m.$$

Einsicht 4 *Die Termine für künftige Neu- und Vollmondstellungen an der Uhr lassen sich mit $b_M = \frac{29930}{1013} d$ aus bekannten Ausgangswerten sukzessiv bestimmen.*

Der modellierte synodische Mond b_M von $29d\ 13h\ 6,1\ldots m$ ist gegenüber dem wahren synodischen Mond b von $29d\ 12h\ 44,0\ldots m$ ca. $22min$ zu groß.

In vier Jahren verliert der Modell-Mond gegenüber dem Naturmond modellbedingt $(b_M - b) \cdot \frac{4 \cdot 365+1}{b} d$, das sind ziemlich genau $18h\ 11m$ (oder fast $4h\ 33m$ im Jahr).

Pro synodischem Mond b ist der Verlust nämlich $b_M - b$.

(Für den erwähnten besseren Näherungswert 31/121 von V ergäbe sich b_M zu

$\frac{1}{\frac{31}{121 \cdot 7} - \frac{1}{365}} d = 29d\ 12h\ 48,0\ldots m$, also ca. $4min$ zu groß,

für die naive dezimale Näherung $0,256$ $\left(= \frac{256}{1000} = \frac{32}{125}\right)$ von V (s. Abschnitt 2.2) jedoch zu

$\frac{1}{\frac{0,256}{7} - \frac{1}{365}} d = 29d\ 13h\ 23,6\ldots m$, also sogar fast $40min$ zu groß, und dies bei dem noch größeren Nenner 125, dezimal eigentlich sogar 1000.)

Die an der Uhr, bei genaueren Beobachtungen, festzustellenden Differenzen zwischen Modell-Mond und Naturmond resultieren aber wie in 2.1 gesehen neben der soeben behandelten Ursache wesentlich aus Schwankungen im Lauf des Naturmondes, die im Modell nicht realisierbar sind. Eine Beurteilung der Ganggenauigkeit des Modell-Mondes durch spontanen Vergleich etwa bei Neu- oder Vollmond ist somit wenig aussagekräftig.

Die Durchschnittswerte der Zeitdifferenzen zwischen Modell-Mond und Naturmond, d.h. der vorzeichenbehafteten Rückstände des Modell-Mondes, an Neu- und Vollmondterminen in den Jahren 2004 bis 2007 z.B. betragen $-6h\ 23m$ (25 Termine), $-2h\ 4m$ (25 Termine), $2h\ 34m$ (24 Termine) bzw. $7h\ 43m$ (25 Termine), Werte aus den Nachrechnungen in [16], ein jährlicher Verlust des Modell-Mondes um etwa $4^1/_2 h$ nach Einsicht 4 deutet sich an.

Extreme Rückstände in diesem Zeitraum sind:
Modell-Neumond $-14h\ 43m$ am 15.8.2004 13:04, $16h\ 49m$ am 13.8.2007 17:50,
-Vollmond $-17h\ 34m$ am 6.3.2004 6:40, $20h\ 13m$ am 24.12.2007 22:27.

Der durchschnittliche Rückstand von Neu- und Vollmond der Uhr in den vier Jahren 2004 - 2007 berechnet sich zu $26min$ und ist auch das Ergebnis einer am 5.3.2004 erfolgten Justierung, erstmals unter (vermeintlich) voller Einsicht in die Gegebenheiten. Für den vorliegenden Zeitraum ist diese Durchschnittsabweichung minimal, s. dazu Abschnitt 4.

3 Die Scheibe HORAS PLANETARUM, die ‚Planetenstunden'-Scheibe

Auf der Scheibe sind die seit alters bekannten, im Tierkreis ‚umlaufenden sieben Gestirne' angeordnet: Saturn, Jupiter, Mars, Sonne (Soll), Venus, Merkur, Mond (Luna) befinden sich in dieser Reihenfolge mit Symbolen und Namen viermal linksherum in 28 abgeteilten Sektoren. In einem inneren Kreis liest man HORAS PLANETARUM. Die Kreisscheibe ist drehbar auf ihrer Achse gelagert, diese Achse fest am Stundenzeiger der Uhr, und vor der Scheibe befindet sich ein roter Zeiger.

HORAS PLANETARUM
Montag, 30.7.2007 5 Uhr

Montag, 6.8.2007 15 Uhr

Mittwoch, 22.8.2007 15 Uhr

Zurück bis zu den Sumerern und Babyloniern im 4. Jt. v. Chr. reicht die Kenntnis der 7 umlaufenden Gestirne, angeordnet nach der Länge ihrer Umlaufzeiten. Diese Anzahl 7 gilt als eine der Ursachen für die Siebentagewoche. Vermutlich haben die Juden diese Woche schon früh übernommen, im Alten Testament gibt es spätestens im 6. Jh. v. Chr. Erwähnungen. Im 1. vorchristlichen Jh. gewann im römischen Reich die unveränderliche Zeiteinteilung in Siebentage-Wochen immer mehr an Bedeutung und ist so auch zu uns gekommen.

„Mit der Siebentage-Woche gekoppelt war die Belegung sowohl der Tage als auch der 24 Stunden eines Tages mit astrologischen Symbolen und Sinngehalten": Für jeden Wochentag und seine Stunden ergab sich eine Abfolge von 24 *Stundenregenten*, indem die eingangs genannte Sequenz der 7 Gestirne periodisch fortgesetzt wird; dabei erkennt man in dem jeweiligen Regenten der ersten Tagesstunde gleichzeitig den *Tagesregenten*.

Es beginnt z.B. am Sonntag in der ersten Stunde mit dem Tagesregenten Sonne, dann folgen Stunde für Stunde Venus, Merkur, Mond, Saturn, Jupiter, Mars, in der 8. Stunde wieder Sonne, auch in der 15. und 22. Stunde, anschließend Venus, Merkur für die 23. und 24. Stunde, und danach steht für die erste Stunde am Montag sein Tagesregent Mond. In weiterer Folge stehen u.a. die Tagesregenten Mars am Dienstag, Merkur am Mittwoch, Jupiter am Donnerstag, Venus am Freitag, Saturn am Samstag. (Bemerkenswert sind z.B. die Namen Sonntag, Montag, mardi, mercredi (franz. Dienstag, Mittwoch), Saturday (engl. Samstag)).

„Mit dem Aufkommen der Schlaguhren an Rathäusern und Kirchen wurde allmählich die schon früh von babylonischen und später auch von ägyptischen Astronomen eingeführte Teilung des Volltages in 24 gleiche Abschnitte (*Äquinoktialstunden*) für den Alltag übernommen.“ „Die kleine (halbe oder deutsche) ‚Uhr‘ zählte von Mitternacht an zweimal 12 Stunden. Sie setzte sich in Deutschland ab der zweiten Hälfte des 14. Jh. immer mehr durch.“ (Diese Absätze nach [8] Abschnitte 1.2 und 3.4.)

Hinter der angesprochenen Scheibe nun befindet sich ein Getriebe mit zwei Zahnrädern im Verhältnis $\frac{24}{28}$, das 28er-Rad ist dabei konzentrisch an die Scheibe montiert, das 24er-Antriebsrad drehbar auf seiner Achse am Stundenzeiger befestigt aber durch ein Kontergewicht gleichstehend ausgerichtet.

Folgende Realisierungen sind denkbar und sind auch aufgetreten.

(a) Das Getriebe ist wie beschrieben in Funktion, oder (a’) es ist außer Betrieb gesetzt und dafür die Scheibe selbst durch ein Kontergewicht gleichstehend ausgerichtet.

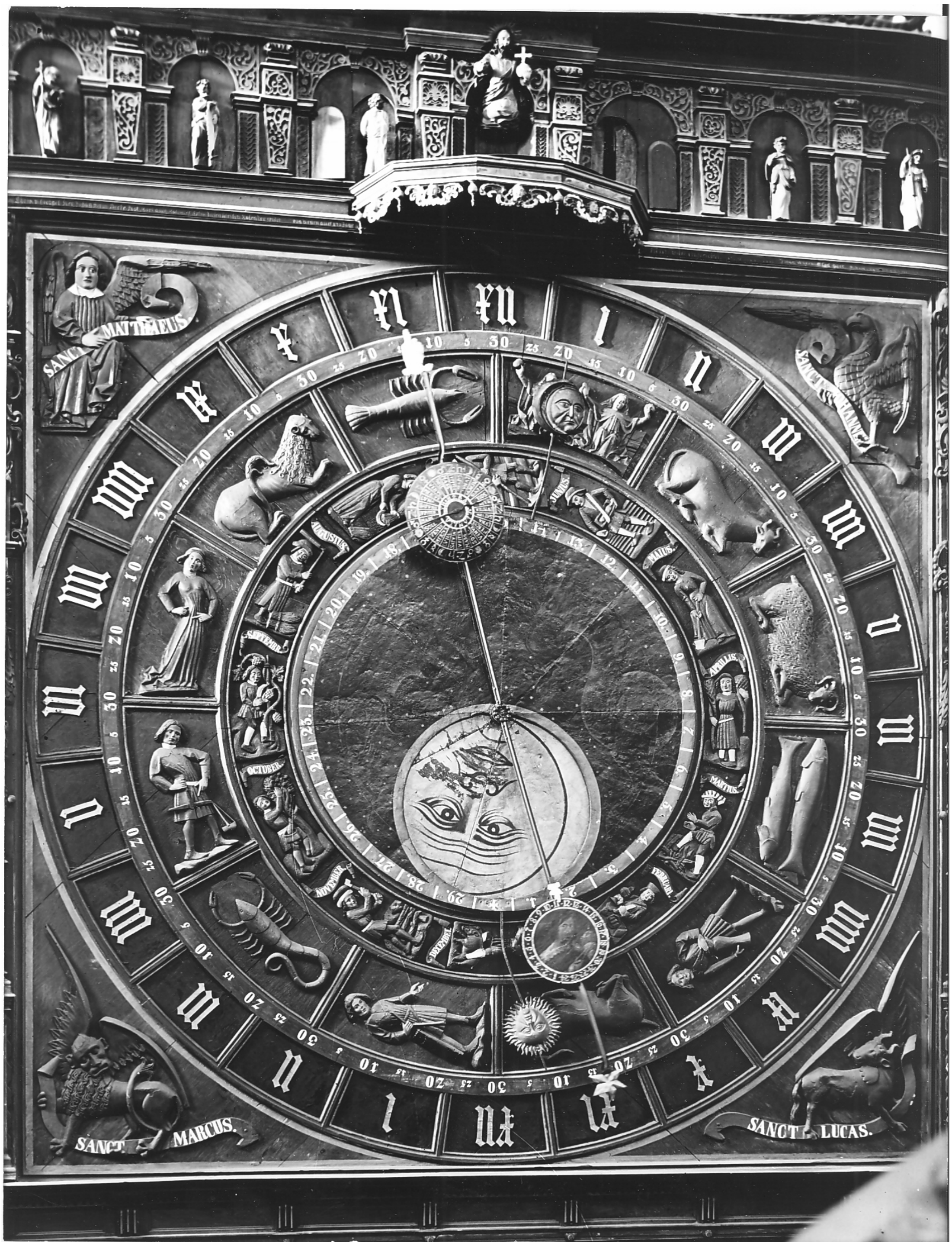
(b) Der rote Zeiger ist auf der Achse der Scheibe in konstantem Winkel zum Stundenzeiger fest montiert, oder (b’) er ist drehbar auf der Achse gelagert, steht durch sein Eigengewicht stets vertikal.

In der Schrift [6] aus dem Jahre 1885 liest man, daß die Uhr bis 1835 in Funktion war, dann aber Stillstand erfolgte (wegen Bauarbeiten in der Kirche) bis zur Wiederherstellung 1885, dem ersten Jahr auf der Kalenderscheibe. Beschrieben wird „eine Scheibe mit einem Planetarium . . . , welche sich, von einem Contragewicht gehalten, mit der Bewegung des Stundenzeigers nach rechts (?) dreht“ (S. 8).

Diese Bewegungserklärung „mit Hilfe einer Gewichtsbeschwerung . . . genau nach dem Prinzip der Sebes-Scheibe“ (sie ist stets gleichstehend ausgerichtet) findet sich 1960 auch in [11] S. 26. Realisiert ist also zu diesen Zeiten die Funktionsweise (a’).

Das bestätigen Fotografien von Karl ESCHENBURG aus dem Jahr 1936 [2], siehe nachfolgende Seiten, auf denen zu unterschiedlichen Stellungen des Stundenzeigers die Scheibe stets in derselben Ausrichtung zu sehen ist (Mond, Saturn, Jupiter unten, man vergleiche auch den Schriftzug HORAS PLANETARUM nahe des Zentrums der Scheibe). Andererseits aber zeigen die Aufnahmen den roten Zeiger in konstantem Winkel zum Stundenzeiger, realisiert ist Funktionsweise (b).

Die Kombination (a’,b) bewirkt, daß sich der Zeiger in $24h$ einmal über alle 28 Sektoren der Scheibe hinwegdreht, und zwar rechtsherum, d.h. entgegengesetzt zur eingangs notierten Reihenfolge der Gestirne.



Aus [2] *1936, mit freundlicher Erlaubnis des Eigentümers*

Bei der umfangreichen Restaurierung 1976 (s. [3]) wurde die „Außerbetriebsetzung des Getriebes hinter der Planetenscheibe und Anbringung eines Kontergewichtes am Rand der Planetenscheibe“ korrigiert in Funktionsweise (a). Leider folgt: „Richtig ist, dass der Zeiger durch Eigengewicht stets senkrecht steht“, also Funktionsweise (b’), von der auch in [12] (S. 33) gesprochen wird. In [13] (S. 11) ist die heutige Realisierung (b) erstmals publiziert.

Aus [2] 1936, mit freundlicher Erlaubnis des Eigentümers

Einsicht 5 *Im* $\frac{24}{28}$ *-Getriebe der Planetenstunden-Scheibe vollführt das* 24*er-Antriebsrad in* 24*h auf seiner Drehachse eine volle Linksdrehung (wegen der Ausrichtung durch das Kontergewicht, bei vollem Rechtsumlauf des Stundenzeigers).*

Die Scheibe dreht sich dadurch (mit dem 28*er-Rad) auf ihrer Achse rechtsherum, und zwar in* 24*h um* 24 *ihrer* 28 *Sektoren.*

Wenn der rote Zeiger dabei fest zur Scheibenachse steht, so drehen sich unter ihm pro Tag 24 *Stundenregenten hindurch, die auf der Scheibe linksherum aufeinanderfolgen.*

Bei der Realisierung (a, b') jedoch kommt zur Rechtsdrehung der Scheibe eine volle Linksdrehung des hängenden Zeigers pro Tag auf derselben Achse hinzu, pro Stunde wandern unter dem Zeiger zusätzlich $\frac{28}{24}$ Sektoren, insgesamt mehr als zwei hindurch. (Wahrnehmung dieses Effekts gab 1999 den ersten Anstoß zur vorliegenden Ausarbeitung.) Die Festsetzung des roten Zeigers auf der Scheibenachse und somit die nach Einsicht 5 sinnvolle Realisierung (a, b) sowie eine zutreffende Ersteinstellung des Stundenregenten erfolgten am 28. Juni 2001.

Nach Quellenlage ist ab diesem Datum erstmals seit 1835 die Anzeige der Stundenregenten wieder adäquat.

4 Überlegungen zu gelegentlich erforderlichen Justierungen

An einem Schalttag sollte die obere Uhr normal weitergehen, damit sich einerseits der Modell-Mond wie erforderlich fortbewegt und andererseits der Zyklus für die Stundenregenten auf der Planetenstunden-Scheibe korrekt fortsetzt. Dadurch gewinnt die Modell-Sonne jedoch einen Tag (Einsicht 1). Dies ist zwar zunächst unerheblich, würde sich aber nach mehrmaliger Wiederholung schließlich doch zeigen. Weil nun aber der Modell-Mond in vier Jahren mehr als $18h$ verliert (Einsicht 4), liegt seine Justierung nahe, und dies könnte in jedem Schaltjahr dann gleich gemeinsam mit der Modell-Sonne (an weitgehend beliebigem Tag) erfolgen, so laute hier der Vorschlag mit den nachfolgenden Überlegungen dazu. (Für die Kalenderscheibe der unteren Uhr, die keinen 29.2. führt, muß die Weiterschaltung einen Tag unterbrochen werden, um auf ihr die richtige Datumsanzeige zu sichern.)

Zur Einstellung des Modell-Mondes unabhängig vom übrigen Uhrwerk gibt es die erwähnte Möglichkeit, ihn zwischen seinem 21er- und 82er-Antriebsrad zu entkoppeln. Dann läßt er sich um eine zu wählende Anzahl von Zähnen seines 82er-Rades, aber nicht anders, neu einstellen. Welcher Zeitspanne entspricht dabei 1 Zahn des 82er-Rades? Die Neueinstellung geschieht entlang des nun stillstehenden, konzentrisch gelagerten Jahresrades der Modell-Sonne, und darum entspricht eine volle Drehung um 82 Zähne einem modellierten synodischen Mond $b_M \left(= \frac{29930}{1013}d = \frac{82 \cdot 365 \cdot 24}{1013}h = 82 \cdot \frac{8760}{1013}h,\ \text{Einsicht } 4\right)$. Somit folgt:

Einsicht 6 *Das Zeitäquivalent pro Zahn des 82er-Rades bei Entkopplung ist*

$$\frac{8760}{1013}h \ (= 8h\ 38,85\ldots m \approx 8h\ 39m).$$

Man beachte den Unterschied zu Einsicht 2.

<u>In vier Jahren</u> verliert der Modell-Mond $18h\ 11m$ (Einsicht 4); hinzu kommt ein *vierjähriger durchschnittlicher vorzeichenbehafteter Rückstand* D zum Naturmond, wir setzen
$S := D + 18h\ 11m$.

Um S müßte der Modell-Mond vorverstellt werden, damit in der nächsten Vierjahresperiode, in der er wiederum $18h\ 11m$ verlieren wird, sein durchschnittlicher Rückstand Null wäre.

Die Prozedur der Justierung beginne vor Entkopplung des Modell-Mondes mit Rückstellung der Modell-Sonne um einen Tag, durch entsprechende Rückdrehung am seinerseits entkoppelbaren $24h$-Rad, dem Antriebsrad des Stundenzeigers.

Die Planetenstunden-Scheibe ist dann um eine erzwungene ‚volle' Rechtsdrehung, die das Kontergewicht überwindet, wieder auf den richtigen Wochentag vorzustellen.

Durch diese Rückstellung des Werkes vergrößert sich der Rückstand des Modell-Mondes künstlich zunächst um weitere $24h$, die zusammen mit S nun bei seiner Entkopplung auszugleichen wären. Die hierfür zu wählende Anzahl von Zähnen bestimmt sich aus dem Verhältnis zum Zeitäquivalent $8h\ 39m$ pro Zahn:

Ist $l := \frac{S+24h}{8h\ 39m}$, und ist k die ganzzahlige Rundung von l (d.h. $-\frac{1}{2} \leq l-k < \frac{1}{2}$), so werde der entkoppelte Modell-Mond um k Zähne seines 82er-Rades vorgestellt. (Man täusche sich über Unbequemlichkeiten bei der Wiedereinkopplung nicht, sie bedarf guter Vorbereitung.)

Hierdurch vermindern sich alle anstehenden Zeiten für den Modell-Mond um $Z := k \cdot 8h\ 39m - 24h$, die künstliche Erhöhung um $24h$, die in k enthalten ist, muß nämlich annulliert werden. Gewünscht war, daß $D' := S - Z = D + 18h\ 11m - Z$ zu Null würde, daß durchschnittlicher Rückstand D sowie 4jähriger Verlust ausgeglichen worden wären. Dies aber kann kaum je eintreten, und daher ändert sich, nach Ausgleich des 4jährigen Verlustes, der Durchschnitt D in den neuen 4jährigen Durchschnitt D'.

Nun ist $S + 24h = l \cdot 8h\ 39m$ und $Z + 24h = k \cdot 8h\ 39m$, somit $D' = S - Z = (l-k) \cdot 8h\ 39m$, also $-4h\ 20m < D' < 4h\ 20m$.

Einsicht 7 *Wird der entkoppelte Modell-Mond nach vier Jahren bei geschilderter Prozedur um k Zähne vorgestellt, so kommt er zukünftig um* $Z := k \cdot 8h\ 39m - 24h$ *eher.*

Der bisherige durchschnittliche Rückstand D zum Naturmond verändert sich um $18h\ 11m - Z$ *zum neuen vierjährigen Durchschnitt* $D' := D + 18h\ 11m - Z$ $(= S - Z)$.

Die Einstellung ist bestmöglich, falls D' *absolut kleiner als* $4h\ 20m$ *ist.*

Empfehlung für 2008:

Es ist $D = 26m$ in den Jahren 2004 – 07 (s. Ende Abschnitt 2.3),

$$S = D + 18h\ 11m = 18h\ 37m, \quad l = \frac{18h\ 37m + 24h}{8h\ 39m} = 4,92\ldots, \quad \text{somit } \underline{k=5};$$

dann wird $Z = 5 \cdot 8h\ 39m - 24h = 19h\ 15m$, $18h\ 11m - Z = -1h\ 4m$ und $D' = D - 1h\ 4m = 26m - 1h\ 4m = -38m$ für 2008 – 11.

Am 21.6.2001 (Sommeranfang, Neumond) wurden Modell-Sonne und Modell-Mond, der einen Rückstand von mehreren Tagen aufwies, neu eingestellt, und zwar noch nach Augenschein. Später wieder auftretende Abweichungen verwunderten zunächst, und führten zu Überlegungen mit den geschilderten Einsichten.

Am 5.3.2004 erfolgte erstmals eine Justierung nach obiger Prozedur (mit $k = 6$). Damals galt $D = 10h\ 6m$ für den zurückliegenden 4jährigen durchschnittlichen Rückstand. Obwohl also drei Jahre zuvor der Modell-Mond vermeintlich bestmöglich eingestellt wurde, war dies nicht gelungen.

5 Schlußbemerkungen, ein Blick in die Zukunft

Konkrete Neu- und Vollmondzeiten des Modell-Mondes in diesen Ausführungen beziehen sich auf die Stellungen der Gesichter, die im Ausschnitt der Sonnenscheibe sichtbar werden. Das Mondsymbol geht leider nicht gänzlich konform hiermit, insbesondere bei Neumond wird erkennbar, daß es dem Sonnensymbol etwas voraus ist. Hierfür sollte bei künftiger Restauration eine Korrektur angestrebt werden. (Aufnahmen [2] zeigen einen gekrümmten Sonnenzeiger, s. Bilder in Abschnitt 3, wodurch dieser Effekt geringer gewesen sein könnte.)

Vollmond an der Uhr, 30.7.2007 5:00

Neumond an der Uhr, 13.8.2007 17:50

Zahlreiche Beobachtungen erhellten außerdem, daß sich Neu- und Vollmondgesicht auf der bemalten Scheibe nicht genau gegenüberstehen: Von Neumond bis Vollmond sind es ca. $15d$, von Vollmond bis Neumond ca. $14d\ 13h$. Letztlich konnten die Daten so präzisiert werden, daß nun stets eine zutreffende Fortberechnung (s. Einsicht 4) möglich ist.

Bei nochmaliger Betrachtung von Einsicht 7 und der Empfehlung für 2008 sieht man, daß mit $k = 5$ stets $18h\ 11m - Z = -1h\ 4m$ gilt. Der Vierjahresdurchschnitt D ändert sich somit bei nachfolgenden vierjährlichen Justierungen mit $k = 5$ immer um diesen selben Wert, und solange D größer als $-4h\ 20m$ bleibt, ist $k = 5$ richtig gewählt. Mit $D = -38m$ für 2008–11 trifft dies nach entsprechender Justierung 2012 zu, auch noch 2016 und 2020, hier mit $D = -3h\ 50m$ für 2020–23.

Dann ist 2024 zur Justierung $k = 4$ richtig mit $Z = 4 \cdot 8h\ 39m - 24h = 10h\ 36m$, $18h\ 11m - Z = 7h\ 35m$ und neuem $D = -3h\ 50m + 7h\ 35m = 3h\ 45m$ für 2024–27.

Danach kommen wieder Verminderungen um $1h\ 4m$ – wenn denn das Uhrwerk, wie durch geschickte Hände jetzt, seine gute Pflege behält.

Angemessenes Justieren ist hiernach über eine längere Zeitspanne hinweg klar, die prognostizierten Werte sind grundsätzlich dem Werk immanent. Das Einbeziehen der Modell-Sonne rät für die Justierungen zu einem Vierjahresrhythmus; häufigeres Justieren könnte u. U. Durchschnittsabweichungen verbessern, aber dies immer nur kurzzeitig und jeweils auch nur in Schritten von $8h\ 39m$, dem Zeitäquivalent für einen Zahn des 82er-Rades. Darum bleibt eine Beurteilung der Einstellungen mittels vierjähriger Rückstandsdurchschnitte und ihrer Lage innerhalb des allgemein bestmöglichen Intervalls I von $-4h\ 20m$ bis $4h\ 20m$ (s. Einsicht 7) unsere Grundlage.

Das empfohlene Vorgehen wird auch davon nicht berührt, daß die in den Rechnungen verwendeten Größen $18h\ 11m$ und $8h\ 39m$ (s. Einsicht 4 bzw. 6) gerundet wurden, ihre Rundungsfehler wirken sich auf die Vorschläge bis in weitere Zukunft nicht aus: Es gilt

$$18h\ 11m < (b_M - b) \cdot \frac{4 \cdot 365 + 1}{b} d < 18{,}1841h, \quad 8{,}6475h < \frac{8760}{1013} h < 8h\ 39m.$$

Daraus folgt für die wahren Änderungen Δ_k des Durchschnitts D bei Justierungen um k Zähne (s. Einsicht 7)

$$18h\ 11m - (k \cdot 8h\ 39m - 24h) < \Delta_k < 18{,}1841h - (k \cdot 8{,}6475h - 24h),$$

speziell bei $k = 5$ bzw. 4

$$-1h\ 4m < \Delta_5 < -1{,}053h \quad \text{bzw.} \quad 7h\ 35m < \Delta_4 < 7{,}595h.$$

Ab 2004–07, d.h. der Justierung 2008 gerechnet, ergibt sich für den wahren Wert von D im Zeitraum 2024–27 bei den oben genannten Prozeduren deshalb

$$3h\ 45m < 26m + 4 \cdot \Delta_5 + 1 \cdot \Delta_4 = D < 3{,}817h < 3h\ 50m,$$

D liegt im soeben bezeichneten Intervall I, und für alle vorhergehenden (kleineren) Durchschnitte sichern dies ja schon die früheren Werte (als gültige untere Abschätzungen).

Bedenkt man noch $7m < 7 \cdot \Delta_5 + 1 \cdot \Delta_4 < 0{,}224h$ ($\approx 13{,}5m$), so erhöhen demnach 7 vierjährliche Justierungen mit $k = 5$ und eine mit $k = 4$ zusammen in 32 Jahren den Durchschnitt D

um einen Wert innerhalb der genannten Schranken. Bei zweimaligem derartigen Vorgehen ab 2024 – 27 würde sogar für 2088 – 91 hochgerechnet gelten

$$3h\ 45m + 2 \cdot 7m = 3h\ 59m < D < 3,817h + 2 \cdot 0,224h = 4,265h < 4h\ 16m,$$

auch dieses größte D der gesamten Abfolge läge noch in I, aber ebenso alle anderen, denn das kleinste unter ihnen (nach 7 Justierungen mit $k = 5$) wäre größer als

$$3h\ 45m + 7 \cdot (-1h\ 4m) = -3h\ 43m.$$

In den Jahren 2092 und 96 wäre wieder $k = 5$ zu wählen, das Nicht-Schaltjahr 2100 dann würde eine eigene Prozedur erfordern ..., wenn nicht künftige Interessierte andere Modi bevorzugt haben werden.

Allerdings wurde der Ausgangswert $D = 26m$ für 2008, auf dem die Rechungen basieren, lediglich aus Stützstellen der kontinuierlichen ‚Rückstandsfunktion' ermittelt, theoretisch wäre ein Integralmittelwert einzusetzen. Solche Untersuchungen erscheinen jedoch im anstehenden Rahmen als irrelevant.

> *Über eine einfache technische Realisierung, die bereits eine Möglichkeit für sporadische Korrekturen enthält, zeigt die Uhr ihren Besuchern Abbilder des natürlichen Sonnen- und Mondlaufs, und diese sind unter geeigneten vierjährlichen Korrekturen so zutreffend, daß unvermeidliche Abweichungen nur bei gezieltem Vergleich wahrgenommen werden können.*

Im Jahr 2017, es ist das Jahr des 500jährigen Reformationsjubiläums, enden auf der großen Kalenderscheibe die ab 1885 geltenden jahrbezogenen Angaben, z.B. die Osterdaten, die Scheibe muß zumindest an diesen Stellen erneuert werden, erforderliche neue Daten liegen seit 1994 vor ([13] S. 20). Auch weitere Restaurationen, so an den Scheiben mit Sonnen- und Mondsymbol, sind sicherlich nötig, um die Uhr als einzigartiges Kulturdenkmal nicht zu gefährden. Hoffen wir, daß gut informierte, wohlgesinnte Verantwortliche hierfür die erforderliche pekuniäre Ausstattung bereithalten.

Ab 2018, dem Jahr des 800jährigen Jubiläums unserer Hansestadt, sollten die neuen Angaben der Kalenderscheibe gelten, und 2019 feiert die Universität Rostock ihr 600jähriges Bestehen, vermutlich auch in St. Marien – wo sie einst gegründet wurde.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn D. Neßelmann für die kritische Durchsicht des ersten Entwurfes und damit verbundene zielgerichtete Anregungen sowie Herrn M. Berger für die aktuellen Fotografien.

Literatur

[1] **Deschauer, S. :** *Die Osterfestberechnung - Astronomie und Tradition formen einen Algorithmus.* Didaktik der Mathematik **1**, 68-84 (1986)

[2] **Eschenburg, K. :** *Rostocks astronomische Uhr, ein technisches Kulturdenkmal.* Rostocker Illustrierte, Wochenbilder des Rostocker Anzeigers vom 1.1.1937, *Fotografien aus dem Jahre 1936.* Universitätsarchiv Rostock, „Photo-Eschenburg-Archiv"

[3] **Gummelt, W. :** *Restaurierungsbericht astronomische Uhr Rostock Marienkirche.* Institut für Denkmalpflege Schwerin, Eingang 5.7.1976

[4] **Herrmann, J. :** *dtv-Atlas Astronomie.* 14. Aufl., München: DTV 2000

[5] **Lichtenberg, H. :** *Das anpassbar zyklische, solilunare Zeitzählungssystem des gregorianischen Kalenders.* Math. Semesterber. **50**, 45-76 (2003)

[6] **Mann, A. :** *Beschreibung der astronomischen Uhr in der St. Marienkirche zu Rostock.* Rostock 1885

[7] **Meeus, J. :** *Astronomische Algorithmen.* 2. Aufl., Leipzig: Barth 1994

[8] **Mütz, K. :** *Faszination Kalender.* Buxheim: Polygon 1996

[9] **Perron, O. :** *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band* I. 3. Aufl., Stuttgart: Teubner 1954

[10] **Peterson, I. :** *Was Newton nicht wußte.* Basel: Birkhäuser 1994

[11] **Preiss, H. :** *Die astronomische Uhr in der St. Marienkirche zu Rostock.* Monatsschrift Feinmechanik und Optik 77, Heft 1, 24-28 (1960)

[12] **Schukowski, M. :** *Die Astronomische Uhr in St. Marien zu Rostock.* Königstein im Taunus: Langewiesche, Köster 1992

[13] **Schukowski, M. :** *Die astronomische Uhr der St.-Marien-Kirche zu Rostock.* Stiftung St.-Marien-Kirche e.V. 2004

[14] **Warm, H. :** *Die Signatur der Sphären.* 2. Aufl., Hamburg: Keplerstern 2004

[15] **Wisliceny, J. :** *Grundbegriffe der Mathematik* II. Berlin: DVW 1974

[16] **Drews, K.-D. :** *Berechnungen zum Eintritt von Neumond und Vollmond an der Astronomischen Uhr der Rostocker Marienkirche für die Jahre* 2000 *bis* 2008. Mskr., jahresweise

eingegangen: 5. Oktober 2007

Autor:

Klaus-Dieter Drews, i. R.
Universität Rostock
Institut für Mathematik
18051 Rostock
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 25–35 (2008)

Subject Classification (AMS)
47H09, 47H10

Daruni Boonchari, Satit Saejung

Weak and strong convergence of a scheme with errors for three nonexpansive mappings

ABSTRACT. We establish weak and strong convergence theorems of modified Ishikawa iteration with errors with respect to three nonexpansive mappings. We improve and extend many results due to Khan and Fukhar-ud-din, Tamura and Takahashi and many authors. We also point out that an additional condition imposed in Rafiq's paper does not make sense.

KEY WORDS. nonexpansive mapping, Ishikawa iteration, uniformly convex space, Opial's condition, condition (A'')

1 Introduction

Nonexpansive mappings have been widely and extensively studied by many authors in many aspects. One is to approximate a common fixed point of nonexpansive mappings by means of an iteratively constructed sequence.

Let C be a nonempty convex subset of a normed space E and $R,\ S,\ T : C \to C$ be three mappings. Xu [13] introduced the following iterative scheme,

(a) The sequence $\{x_n\}$ defined by

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ x_{n+1} = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ are sequences in [0,1] such that $a_n + b_n + c_n = 1$ and $\{u_n\}$ is a bounded sequence in C, is known as Mann iterative scheme with errors. This scheme reduces to Mann iterative scheme if $c_n \equiv 0$, i.e.,

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n) T x_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{2}$$

where $\{a_n\}$ is a sequence in [0,1].

(b) The sequence $\{x_n\}$ defined by

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ y_n = a'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n \\ x_{n+1} = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{a'_n\}, \{b'_n\}, \{c'_n\}$ are sequences in [0,1] satisfying $a_n + b_n + c_n = 1 = a'_n + b'_n + c'_n$ and $\{u_n\}, \{v_n\}$ are bounded sequences in C, is called the Ishikawa iterative scheme with errors. This scheme becomes Ishikawa iterative scheme if $c_n \equiv 0 \equiv c'_n$, i.e.,

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ y_n = a'_n x_n + (1 - a'_n) T x_n \\ x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n) T x_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{4}$$

where $\{a_n\}, \{a'_n\}$ are sequences in [0,1].

A generalization of Mann and Ishikawa iterative schemes was given by Das and Debata [3] and Takahashi and Tamura [11]. This scheme dealt with two mappings:

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ y_n = a'_n x_n + (1 - a'_n) T x_n \\ x_{n+1} = a_n x_n + (1 - a_n) S y_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{5}$$

(c) The sequence $\{x_n\}$, defined by

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ y_n = a'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n \\ x_{n+1} = a_n x_n + b_n S y_n + c_n u_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{6}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{a'_n\}, \{b'_n\}, \{c'_n\}$ are sequences in [0,1] satisfying $a_n + b_n + c_n = 1 = a'_n + b'_n + c'_n$ and $\{u_n\}, \{v_n\}$ are bounded sequences in C, is studied by S. H. Khan and H. Fukhar-ud-din [4].

Inspired by [4] and [5], we generalize the scheme (6) to three nonexpansive mappings with errors as follows:

(d) The sequence $\{x_n\}$, defined by

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_n = a'_n R x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n \\ x_{n+1} = a_n R x_n + b_n S y_n + c_n u_n, \qquad n \geq 1, \end{cases} \tag{7}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{a'_n\}, \{b'_n\}, \{c'_n\}$ are sequences in [0,1], $a_n + b_n + c_n = 1 = a'_n + b'_n + c'_n$ and $\{u_n\}, \{v_n\}$ are bounded sequences in C.

2 Preliminaries

Let E be a Banach space and let C be a nonempty closed convex subset of E. When $\{x_n\}$ is a sequence in E, we denote strong convergence of $\{x_n\}$ to $x \in E$ by $x_n \to x$ and weak convergence by $x_n \rightharpoonup x$.

A Banach space E is said to be satisfy Opial's condition [7] if for any sequence $\{x_n\}$ in E, $x_n \rightharpoonup x$ it follows that $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ for all $y \in E$ with $y \neq x$. For every ε with $0 \leq \varepsilon \leq 2$, we define the modulus $\delta_E(\varepsilon)$ of convexity of E by

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

A Banach space E is said to be uniformly convex if $\delta_E(\varepsilon) > 0$ for every $\varepsilon > 0$.

A mapping $T : C \to C$ is said to be nonexpansive if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. A mapping $T : C \to E$ is said to be demiclosed with respect to $y \in E$ if for each sequence $\{x_n\}$ in C and each $x \in E$, $x_n \rightharpoonup x$ and $Tx_n \to y$ it follows that $x \in C$ and $Tx = y$.

Next we state the following useful lemmas.

Lemma 1 ([9]) *Suppose that E is a uniformly convex Banach space and $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ for all positive integers n. Also suppose that $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two sequences of E such that $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r$, $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r$ and $\lim_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1 - t_n)y_n\| = r$ hold for some $r \geq 0$. Then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

Lemma 2 ([12], Lemma 1) *Let $\{s_n\}, \{t_n\}$ be two nonnegative real sequences satisfying*

$$s_{n+1} \leq s_n + t_n \quad \text{for all} \quad n \geq 1.$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$, then $\lim_{n\to\infty} s_n$ exists.

Lemma 3 ([1]) *Let E be a uniformly convex Banach space satisfying Opial's condition and let C be a nonempty closed convex subset of E. Let T be a nonexpansive mapping of C into itself. Then $I - T$ is demiclosed with respect to zero.*

3 Main results

In this section, we shall prove the weak and strong convergence theorems of the iteration scheme to a common fixed point of the nonexpansive mappings R, S and T. Let $F(T)$ denote the set of all fixed points of T.

Lemma 4 *Let E be a uniformly convex Banach space and C its nonempty closed convex subset. Let $R,\ S,\ T : C \to C$ be nonexpansive mappings and $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (7) with $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n' < \infty$. If $F(R) \cap F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$, then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ exists for all $p \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$.*

Proof: Assume that $F(R) \cap F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Let $p \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$. Since $S,\ T,\ R$ are nonexpansive mappings, we have

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|a_n' Rx_n + b_n' Tx_n + c_n' v_n - p\| \\
&\le a_n' \|Rx_n - p\| + b_n' \|Tx_n - p\| + c_n' \|v_n - p\| \\
&\le a_n' \|x_n - p\| + b_n' \|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\| \\
&= (a_n' + b_n') \|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\| \\
&= (1 - c_n') \|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\| \\
&\le \|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\|
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|a_n Rx_n + b_n Sy_n + c_n u_n - p\| \\
&\le a_n \|Rx_n - p\| + b_n \|Sy_n - p\| + c_n \|u_n - p\| \\
&\le a_n \|y_n - p\| + b_n \|x_n - p\| + c_n \|u_n - p\| \\
&\le a_n (\|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\|) + b_n \|x_n - p\| + c_n \|u_n - p\| \\
&= a_n \|x_n - p\| + a_n c_n' \|v_n - p\| + b_n \|x_n - p\| + c_n \|u_n - p\| \\
&= (a_n + b_n) \|x_n - p\| + a_n c_n' \|v_n - p\| + c_n \|u_n - p\| \\
&\le \|x_n - p\| + c_n' \|v_n - p\| + c_n \|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{9}$$

By Lemma 2, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ exists. □

Lemma 5 *Let E be a uniformly convex Banach space and C its nonempty closed convex subset. Let $S, T, R : C \to C$ be nonexpansive mappings and $\{x_n\}$ be the sequence as defined in (7) with $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n' < \infty$ and $0 < \delta \le b_n, b_n' \le 1 - \delta < 1$. If $F(R) \cap F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ and*

$$\|x - Sy\| \le \|Rx - Sy\| \quad \text{for all } x, y \in C, \tag{10}$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Rx_n - x_n\| = 0$$

for all $p \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$.

Proof: From Lemma 4, we get $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ exists. Let $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=c$. Then if $c=0$, we are done. Assume that $c>0$. Next, we want to show that $\lim_{n\to\infty}\|Sy_n-Rx_n\|=0$. We note that $\{u_n-Rx_n-p\}$ is a bounded sequence, so $\lim_{n\to\infty}c_n\|u_n-Rx_n-p\|=0$. Consider

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-p\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b_n)Rx_n+b_nSy_n+c_nu_n-c_nRx_n-p\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b_n)(Rx_n-p)+b_n(Sy_n-p)+c_n(u_n-Rx_n-p)\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b_n)(Rx_n-p)+b_n(Sy_n-p)\| \end{aligned} \tag{11}$$

and from (8) we have

$$\limsup_{n\to\infty}\|Sy_n-p\|\le\limsup_{n\to\infty}\|y_n-p\|\le\limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\|+c'_n\|v_n-p\|=c \tag{12}$$

also,

$$\limsup_{n\to\infty}\|Rx_n-p\|\le\limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\|=c.$$

Using Lemma 1 and (11), we have

$$\lim_{n\to\infty}\|Sy_n-Rx_n\|=0. \tag{13}$$

It follows then that

$$\begin{aligned} \|Rx_n-x_n\| &\le \|Rx_n-Sy_n\|+\|Sy_n-x_n\| \\ &\le 2\|Rx_n-Sy_n\|\to 0, \end{aligned} \tag{14}$$

and hence

$$\|Sy_n-x_n\|\le\|Sy_n-Rx_n\|+\|Rx_n-x_n\|\to 0. \tag{15}$$

We are going to apply Lemma 1 again. To show that $\lim_{n\to\infty}\|y_n-p\|=c$, we observe that $\|x_n-p\|\le\|x_n-Sy_n\|+\|Sy_n-p\|\le\|x_n-Sy_n\|+\|y_n-p\|$ which implies that

$$c\le\liminf_{n\to\infty}\|y_n-p\|.$$

This together with (12) gives

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-p\|=c. \tag{16}$$

Finally, from (16) and the boundedness of the sequence $\{v_n-Rx_n-p\}$, we have

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty}\|y_n-p\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b'_n)Rx_n+b'_nTx_n+c'_nv_n-c'_nRx_n-p\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b'_n)(Rx_n-p)+b'_n(Tx_n-p)+c'_n(v_n-Rx_n-p)\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(1-b'_n)(Rx_n-p)+b'_n(Tx_n-p)\|. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\limsup_{n\to\infty} \|Tx_n - p\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c,$$

and

$$\limsup_{n\to\infty} \|Rx_n - p\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c.$$

Applying Lemma 1, we get

$$\lim_{n\to\infty} \|Rx_n - Tx_n\| = 0. \tag{17}$$

Using (14) and (17), we get that

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \tag{18}$$

Consequently, using (13), (14), (18) and

$$\begin{aligned}
\|x_n - Sx_n\| &\le \|x_n - Sy_n\| + \|Sy_n - Sx_n\| \\
&\le \|x_n - Sy_n\| + \|y_n - x_n\| \\
&\le \|x_n - Sy_n\| + a'_n\|Rx_n - x_n\| + b'_n\|Tx_n - x_n\| + c'_n\|v_n - x_n\| \\
&\le \|x_n - Sy_n\| + a'_n\|Rx_n - x_n\| + b'_n\|Tx_n - x_n\| + c'_n\|v_n - p\|,
\end{aligned}$$

we have

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0. \tag{19}$$

This completes the proof. □

We first establish the weak convergence theorem of our iteration.

Theorem 6 *Let E be a uniformly convex Banach space satisfies the Opial's condition and C, S, T, R and $\{x_n\}$ be taken as in Lemma 5. If $F(R) \cap F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$, then $\{x_n\}$ converges weakly to a common fixed point of S, T and R.*

Proof: Let $p \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$, then as proved in Lemma 4, we get $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ exists. Now we prove that $\{x_n\}$ has a unique weak subsequential limit in $F(R)\cap F(S)\cap F(T)$. To prove this, let z_1 and z_2 be weak limits of the subsequences $\{x_{n_i}\}$ and $\{x_{m_j}\}$ of $\{x_n\}$, respectively. By Lemma 11, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$ and $I - S$ is demiclosed with respect to zero by Lemma 3, therefore we obtain $Sz_1 = z_1$. Similarly, $Tz_1 = z_1$ and $Rz_1 = z_1$. Again in the same way, we can prove that $z_2 \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$. Next, we prove the uniqueness.

For this we suppose that $z_1 \neq z_2$, then by the Opial's condition

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z_1\| \\ &< \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z_2\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n - z_2\| \\ &= \lim_{j\to\infty} \|x_{m_j} - z_2\| \\ &< \lim_{j\to\infty} \|x_{m_j} - z_1\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n - z_1\|.\end{aligned}$$

This is contradiction. Hence $\{x_n\}$ converges weakly to a point in $F(R) \cap F(S) \cap F(T)$. □

Our next goal is to prove a strong convergence theorem. Recall that a mapping $T : C \to C$ where C is a subset of E, is said to satisfy condition (A) ([10]) if there exists a nondecreasing function $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ with $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ for all $r \in (0, \infty)$ such that $\|x - Tx\| \geq f(d(x, F(T)))$ for all $x \in C$ where $d(x, F(T)) = \inf\{\|x - x^*\| : x^* \in F(T)\}$.

Senter and Dotson [10] approximated fixed points of nonexpansive mapping T by Mann iterates. Later on, Maiti and Ghosh [6] and Tan and Xu [12] studied the approximation of fixed points of a nonexpansive mapping T by Ishikawa iterates under the same condition (A) which is weaker than the requirement that d is demicompact.

Three mappings $R, S, T : C \to C$ where C is a subset of E, are said to satisfy condition (A'') if there exists a nondecreasing function $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ with $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ for all $r \in (0, \infty)$ such that

$$\frac{1}{3}(\|x - Rx\| + \|x - Tx\| + \|x - Sx\|) \geq f(d(x, F))$$

for all $x \in C$ where $d(x, F) = \inf\{\|x - x^*\| : x^* \in F = F(R) \cap F(S) \cap F(T)\}$.

Note that condition (A'') reduces to condition (A) when $R = S = T$. We shall use condition (A'') instead of the compactness of C to study the strong convergence of $\{x_n\}$ defined in (7). It is noted that if $R = I$, then condition (A'') reduces to condition (A') of Khan and Fukhar-ud-din [4].

Theorem 7 *Let E be a uniformly convex Banach space and C, $\{x_n\}$ be taken as in Lemma 5. Let R, S, $T : C \to C$ be three mappings satisfying condition (A''). If $F(R) \cap F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$, then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of R, S and T.*

Proof: By Lemma 4, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ exists for all $p \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$. Let $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c$ for some $c \geq 0$. If $c = 0$, we are done. Suppose that $c > 0$. By

Lemma 5, $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Rx_n - x_n\| = 0$. Let $M = \sup\{\|v_n - x_n\|, \|u_n - x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Moreover, by (9),

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - p\| \\
&\le \|x_n - p\| + c_n'\|v_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
&\le \|x_n - p\| + c_n'\|v_n - x_n\| + c_n'\|x_n - p\| + c_n\|u_n - x_n\| + c_n\|x_n - p\| \\
&\le (1 + c_n' + c_n)\|x_n - p\| + c_n'\|v_n - x_n\| + c_n\|u_n - x_n\| \\
&\le (1 + c_n' + c_n)\|x_n - p\| + (c_n' + c_n)M. \qquad (20)
\end{aligned}$$

This implies that $d(x_{n+1}, F) \le (1+c_n'+c_n)d(x_n, F)+(c_n'+c_n)M$ and hence $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ exists by virtue of Lemma 2. By condition (A''),

$$\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F)) = 0.$$

Since f is a nondecreasing function and $f(0) = 0$, therefore $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$. Next, we show that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in E.

Let $\epsilon > 0$. We choose a positive integer N_1 such that

$$d(x_{N_1}, F) < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (21)$$

We next choose $q \in F$ such that

$$\|x_{N_1} - q\| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (22)$$

By $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ exists, the sequence $\{\|x_n - p\|\}$ is bounded. Let $K = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n - q\|, M\}$. Then from (20), we have

$$\|x_{n+1} - q\| \le \|x_n - q\| + (c_n' + c_n)K. \qquad (23)$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} c_n' < \infty$, there exists N_2 such that

$$\sum_{i=N_2}^{\infty} Q_i < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad (24)$$

where $Q_i = (c_i + c_i')K$. We take $N = \max\{N_1, N_2\}$. Let $n \ge N$ and $m \ge 1$. It follows from (22), (23) and (24) that

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p\| + \|p - x_n\| \\
&\leq \|x_n - p\| + \|p - x_n\| + \sum_{i=n}^{n+m-1} Q_i \\
&= 2\|x_n - p\| + \sum_{i=n}^{n+m-1} Q_i \\
&\leq 2\|x_N - p\| + 2\sum_{i=N}^{n-1} Q_i + \sum_{i=n}^{n+m-1} Q_i \\
&\leq 2\|x_N - p\| + 2\sum_{i=N}^{n+m-1} Q_i \\
&\leq 2\|x_N - p\| + 2\sum_{i=N}^{\infty} Q_i \\
&\leq 2(\frac{\varepsilon}{4}) + 2(\frac{\varepsilon}{4}) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Hence $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in E. Since C is closed, $x_n \to x \in C$. By the continuities of S, R, T and (14), (18), (19), we get $Sx = Rx = Tx = x$. So $x \in F(R) \cap F(S) \cap F(T)$. This completes the proof. □

If R is the identity mapping, then (10) is automatically satisfied and we have the following.

Corollary 8 ([4],Theorem 1, Theorem 2) *Let E be a uniformly convex Banach space and C, S, T and $\{x_n\}$ be taken as in Theorem 7. Suppose that $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Then*

1. *If E has the Opial's condition, then $\{x_n\}$ converges weakly to a common fixed point of S and T,*
2. *If the mappings S and T satisfy condition (A'), then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of S and T.*

Remark 1 Theorem 6 and Theorem 7 extend and improve Theorem 1 and Theorem 2 of [4] in the following ways:

1. the iteration methods in [4] are included as a special case of ours. Indeed, the identity mapping is replaced by the more general nonexpansive mapping,
2. the boundedness of C is not assumed as was the case in [4].

Remark 2 The following example [5, see Example 3.1] shows that our results extend substantially results in [4].

Example 9 Let E be the real line with the usual norm and let $C = [-1, 1]$. Define $R, S, T : C \to C$ by

$$Rx = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ -x, & x \in [-1,0) \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} -\sin x, & x \in [0,1] \\ \sin x, & x \in [-1,0) \end{cases} \quad \text{and} \quad Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \in [0,1] \\ -\frac{1}{2}x, & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Obviously, $F(R) \cap F(S) \cap F(T) = \{0\}$. Moreover, it is not hard to see that nonexpansive mappings R, S and T satisfy condition (A'').

Remark 3 Recently, Rafiq [8] introduced the following condition: two mappings $S, T : C \to C$ are said to satisfy (AU-N) if

$$\|Sx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \text{for all } x, y \in C.$$

It the clear that if $S = T$, then (AU-N) is the definition of nonexpansive mappings. Unfortunately, if S and T satisfy (AU-N), then

$$\|Sx - Tx\| \leq \|x - x\| = 0 \quad \text{for all } x \in C,$$

from which $S = T$. This means (AU-N) is meaningless. Consequently, all results in [8] are just dealing with only one mapping.

Acknowledgements

The second author supported by the Thailand Research Fund (Grant MRG4980022). The authors would like to thank W. Nilsrakoo for drawing our attention to [8].

References

[1] **Browder, F. E. :** *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces.* Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 18, Part 2, Chicago, Ill., 1968). 1–308. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1976)

[2] **Chidume, C. E.**, and **Moore, C. :** *Fixed point iteration for pseudocontractive maps.* Proc. Amer. Math. Soc. **127(4)**, 1163–1170, (1999)

[3] **Das, G.**, and **Debata, J. P. :** *Fixed points of quasinonexpansive mappings.* Indian J. Pure Appl. Math. **17(11)**, 1263–1269, (1986)

[4] **Khan, S. H.**, and **Fukhar-ud-din, H. :** *Weak and strong convergence of a scheme with errors for two nonexpansive mappings.* Nonlinear Anal. **61(8)**, 1295–1301, (2005)

[5] **Liu, Z., Agarwal, R. P., Feng, C.**, and **Kang, S. M. :** *Weak and strong convergence theorems of common fixed points for a pair of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings.* Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. **44** , 83–96, (2005)

[6] **Maiti, M.**, and **Ghosh, M. K. :** *Approximating fixed points by Ishikawa iterates.* Bull. Austral. Math. Soc. **40(1)**, 113–117, (1989)

[7] **Opial, Z. :** *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings.* Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 591–597, (1967)

[8] **Rafiq, A. :** *Convergence of an iterative scheme due to Agarwal et al.* Rostock. Math. Kolloq. **61**, 95–105, (2006)

[9] **Schu, J. :** *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings.* Bull. Austral. Math. Soc. **43(1)**, 153–159, (1991)

[10] **Senter, H. F.**, and **Dotson, W. G. :** *Approximating fixed points of nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **44**, 375–380, (1974)

[11] **Takahashi, W.**, and **Tamura, T. :** *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings.* J. Convex Anal. **5(1)**, 45–56, (1998)

[12] **Tan, K. K.**, and **Xu, H. K. :** *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process.* J. Math. Anal. Appl. **178(2)**, 301–308, (1993)

[13] **Xu, Y. :** *Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operator equations.* J. Math. Anal. Appl. **224(1)**, 91–101, (1998)

received: August 29, 2007

Authors:

Daruni Boonchari
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Mahasarakham University,
Maha Sarakham 44150,
Thailand

e-mail: boonchari@hotmail.com

Satit Saejung
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Khon Kaen University,
Khon Kaen 40002,
Thailand

e-mail: saejung@kku.ac.th

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 37–54 (2008)

Subject Classification (AMS)
11A63, 39B22, 26A30

Manfred Krüppel

Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums

ABSTRACT. In this paper we derive functional relations and explicit representations at dyadic points for Takagi's continuous nowhere differentiable function T and also for functions which are connected with T. As consequence we get formulas for binary digital sums, namely the Trollope-Delange formula for the number of ones, a formula counting the zeros as well as a formula for the alternating sum of digits.

KEY WORDS. Takagi's continuous nowhere differentiable function, functional equations, Trollope-Delange formula for the sum-of-digits function, alternating sum of digits, Cantor sets.

1 Introduction

In 1903, T. Takagi [10] discovered an example of a continuous, nowhere differentiable function that was simpler than a well-known example of K. Weierstrass. Takagi's function T is defined by

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

where $\Delta(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$ is an 1-periodic function. T is given for $0 \leq x \leq 1$ by the following system of functional equations

$$T\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}T(x), \qquad T\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}T(x). \tag{1.2}$$

This function is connected with the well-known formula of Trollope-Delange for the sum of digits, cf. [11], [4]. Let $k \in \mathbb{N}$ have the binary expansion

$$k = \sum_{j=0}^{k'} a_j 2^j \qquad (a_j \in \{0, 1\}) \tag{1.3}$$

with $k' = [\log_2 k]$, and let $s_1(k) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{k'}$ the number of ones then it holds the Trollope-Delange formula

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_1(k) = \frac{1}{2}\log_2 n + F_1(\log_2 n) \tag{1.4}$$

where $F_1(u)$ is a continuous, 1-periodic, nowhere differentiable function. In [4] was also determined the Fourier expansion of F_1. In [6] it was given a new proof of the Trollope-Delange formula by means of the Mellin transforms. We show that formula (1.4) is a consequence of functional relations for T and that the periodic function $F_1(u)$ for $u \leq 0$ is representable by

$$F_1(u) = -\frac{u}{2} - \frac{1}{2^{u+1}}T(2^u) \qquad (u \leq 0)$$

where T is Takagi's continuous nowhere differentiable function (Theorem 2.1). We shall verify the well-known bounds $\min F_1 = \frac{\log 3}{\log 4} - 1$, $\max F_1 = 0$ and determine the local maxima of $F_1(u)$ (Proposition 2.5).

If $s_0(k)$ denotes the number of zeros in the binary expansion (1.3) of k then it holds

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} s_0(k) = \frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{n} + F_0(\log_2 n)$$

where F_0 is a continuous, 1-periodic, nowhere differentiable function which is given by

$$F_0(u) = \frac{1-u}{2} - 2^{1-u} + \frac{1}{2^u}T(2^{u-1}) \qquad (0 \leq u < 1)$$

(Theorem 3.2). It holds $\min F_0 = -1$ and $\max F_0 = \frac{\log 3}{\log 4} - \frac{3}{2}$ (Proposition 3.3).

Moreover, for the alternating binary sum

$$\tilde{s}(k) = \sum_{j=0}^{k'} (-1)^j a_j \tag{1.5}$$

with k from (1.3) we show that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{s}(k) = \tilde{F}(\log_4 n)$$

where $\tilde{F}$ is a continuous, 1-periodic, nowhere differentiable function which is connected with Takagi's function as follows:

$$\tilde{F}(u) = \frac{1}{2^{2u+1}}\tilde{T}(4^u) \qquad (u \leq 0)$$

where

$$\tilde{T}(x) = T(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{T(2^n x)}{2^{n-1}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(Theorem 5.1). Finally, we investigate several properties of $\tilde{F}$. The bounds of $\tilde{F}$ are $\min \tilde{F} = 0$ and $\max \tilde{F} = \frac{1}{2}$. We show that the zero set of $\tilde{F}$ is a Cantor set of Lebesgue measure 0 and that $\tilde{F}$ satisfies the functional equation

$$\tilde{F}(u) + \tilde{F}\left(u + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad (u \in \mathbb{R})$$

(Proposition 5.5).

2 The binary sum-of-digit function

In [7] it was shown that for $\ell \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^\ell - 1$ and $x \in [0, 1]$, the Takagi function T satisfies the functional equations

$$T\left(\frac{k + x}{2^\ell}\right) = T\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s_1(k)}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}T(x) \tag{2.1}$$

and that the representation

$$T\left(\frac{n}{2^\ell}\right) = \frac{n\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}\sum_{k=0}^{n-1} s_1(k) \tag{2.2}$$

with $n = 0, \ldots, 2^\ell$ is a consequence of (2.1).

Formula (2.2) implies that for $n \le 2^\ell$ the binary sum-of-digit function

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} s_1(k) \tag{2.3}$$

can be represented by

$$S_1(n) = \frac{n\ell}{2} - 2^{\ell-1}T\left(\frac{n}{2^\ell}\right) \tag{2.4}$$

where T is the Takagi function given by (1.1). In particular, for $n = 2^\ell$ we find from (2.4) in view of $T(1) = 0$ that $S_1(2^\ell) = \ell 2^{\ell-1}$. We show that the formula of Trollope-Delange is a consequence of (2.4).

Theorem 2.1 *It holds Trollope-Delange formula (1.4) where F_1 is a continuous, 1-periodic, nowhere differentiable function which is given by*

$$F_1(u) = -\frac{u}{2} - \frac{1}{2^{u+1}}T(2^u) \qquad (u \le 0). \tag{2.5}$$

Proof: According to the first equation in (1.2) the function

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}\left\{\log_2 x + \frac{1}{x}T(x)\right\} \qquad (0 < x \le 1) \tag{2.6}$$

has for $0 < x \le \frac{1}{2}$ the property $f_1(2x) = f_1(x)$ so that it can be extended for all positive x by

$$f_1(2x) = f_1(x) \qquad (x > 0). \tag{2.7}$$

We show that for $n \in \mathbb{N}$ it holds

$$\frac{1}{n} S_1(n) = \frac{1}{2} \log_2 n + f_1(n). \tag{2.8}$$

For given n we choose ℓ so large that $n < 2^\ell$. From (2.4) we find in view of (2.6) and (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} S_1(n) &= \frac{\ell}{2} - \frac{2^{\ell-1}}{n} T\left(\frac{n}{2^\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{1}{2}\left\{\log_2\left(\frac{n}{2^\ell}\right) + \frac{2^\ell}{n} T\left(\frac{n}{2^\ell}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 n + f_1\left(\frac{n}{2^\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 n + f_1(n). \end{aligned}$$

If we put

$$F_1(u) = f_1(2^u) \qquad (u \in \mathbb{R}) \tag{2.9}$$

then (2.7) is equivalent to $F_1(u+1) = F_1(u)$. Moreover, (2.8) turns over into (1.4) and (2.6) yields (2.5). □

According to (2.9) the functions F_1 and f_1 have the same bounds.

Proposition 2.2 *For the function $f_1 : (0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ from (2.6) we have* $\max f_1 = 0$ *where $f_1(x) = 0$ if and only if $x = \frac{1}{2^\ell}$ with $\ell \in \mathbb{N}_0$. Furthermore,* $\min f_1 = \frac{\log 3}{\log 4} - 1$ *and we have $f_1(x) = \min f_1$ exactly for $x = \frac{2}{3}\frac{1}{2^\ell}$ with $\ell \in \mathbb{N}_0$.*

Proof: In view of (2.7) we only have to consider an interval of the form $(a, 2a]$ with any $a \in (0, \frac{1}{2}]$.

1. First we show that for $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ we have $f_1(x) < 0 = f_1(1)$ which in view of (2.6) is equivalent to

$$T(x) > -x \log_2 x.$$

We consider the partial sum $T_2(x) = \Delta(x) + \frac{1}{2}\Delta(2x)$ of (1.1), which satisfies

$$T_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ 2(1-x) & \text{for } \frac{3}{4} \le x \le 1, \end{cases}$$

and $T(x) > T_2(x)$ for $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. For the function $f(x) = -x \log_2 x$ we have $f(\frac{1}{2}) = T_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ and $f(1) = T_2(1) = 0$. It follows in view of $f'(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{\log 2} < 0$ and $f'(1) = -\frac{1}{\log 2} > -2$ and the convexity of f that $T_2(x) > f(x)$ for $\frac{1}{2} < x < 1$. Consequently, $f_1(x) < 0$ for $\frac{1}{2} < x < 1$.

2. Let $c = f_1(\frac{2}{3}) = \frac{\log 3}{\log 4} - 1$. We show that $f_1(x) > c$ for $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, i.e.

$$-\frac{1}{2}\left\{\log_2 x + \frac{1}{x}T(x)\right\} > c$$

which is equivalent to

$$x \log_2 x + T(x) + 2cx < 0 \qquad \left(\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right).$$

Since $\max T = \frac{2}{3}$ the inequality is true if the function

$$g(x) = x \log_2 x + \frac{2}{3} + 2cx$$

has the property $g(x) < 0$ for $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. But this is valid since g is strictly convex and $g(\frac{1}{3}) = g(\frac{2}{3}) = 0$. □

In order to determine the local maxima of f_1 we shall show the

Lemma 2.3 *Let $a = \frac{k}{2^\ell}$ and $b = \frac{k+1}{2^\ell}$ with $\ell \in \mathbb{N}$ and $2^{\ell-1} \leq k < 2^\ell$. Then for $x = ta + (1-t)b$ with $0 \leq t \leq 1$ we have the inequality*

$$\frac{T(x)}{x} \geq t\frac{T(a)}{a} + (1-t)\frac{T(b)}{b}. \tag{2.10}$$

Proof: If this inequality is valid for $t = \frac{1}{2}$ then it follows by induction that it is valid for all dyadic $t = \frac{m}{2^n} \in (0, 1)$ and hence for all $t \in (0, 1)$ in view of continuity of T. So it is sufficient to prove (2.10) only for $t = \frac{1}{2}$.

In case $\ell = 1$ we have $k = 1$, i.e. $a = \frac{1}{2}$, $T(a) = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $T(b) = 0$, $x = \frac{3}{4}$, $T(x) = \frac{1}{2}$, so that (2.10) is true for $t = \frac{1}{2}$.

In the following let $\ell \geq 2$. If we put $A = T(a)$ and $B = T(b)$ then for $x = \frac{a+b}{2}$ we get from (2.1) that $T(x) = \frac{A+B}{2} + \frac{b-a}{2}$, and (2.10) with $t = \frac{1}{2}$ reads

$$\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{b-a}{2}}{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{A}{2a} + \frac{B}{2b}.$$

A simple calculation yields that this inequality is equivalent to

$$\frac{A}{a} \leq \frac{B}{b} + 2. \tag{2.11}$$

According to (2.1) we have

$$B = A + \frac{\ell - 2s_1(k)}{2^\ell}$$

and hence

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{a} + \frac{2s_1(k) - \ell}{k}.$$

Because of $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$ we have $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{kb}$ and so inequality (2.11) is satisfied whenever

$$\frac{B}{kb} + \frac{2s_1(k) - \ell}{k} \leq 2$$

i.e. $\frac{1}{b}B + 2s_1(k) - \ell \leq 2k$. This is true for $\ell \geq 2$ since $b > \frac{1}{2}$, $B \leq \max T = \frac{2}{3}$, i.e. $\frac{1}{b}B < \frac{4}{3}$, and $s_1(k) \leq k$. □

Proposition 2.4 *The function f_1 from (2.6) has exactly at the dyadic points $\frac{k}{2^\ell}$ ($\ell \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, 2^\ell\}$) local maxima.*

Proof: In [7] it was shown that for dyadic points $x = \frac{k}{2^\ell}$ ($\ell \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, 2^\ell\}$) there exists the limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{|h| \log_2 \frac{1}{|h|}} = 1.$$

For the function f_1 from (2.6) by simple calculation it follows

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{|h| \log_2 \frac{1}{|h|}} = -\frac{1}{2x}.$$

Consequently, for dyadic $x = \frac{k}{2^\ell}$ it holds

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{|h|} = -\infty$$

which implies that f_1 has at x a local maximum (top).

Now let x be a nondyadic point where by (2.7) we can assume that $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Then for $\ell \in \mathbb{N}$ there is an integer $k = k(\ell)$ with $2^{\ell-1} \leq k < 2^\ell$ such that $\frac{k}{2^\ell} < x < \frac{k+1}{2^\ell}$, i.e. $x = ta + (1-t)b$ with $a = \frac{k}{2^\ell}$, $b = \frac{k+1}{2^\ell}$ and a certain $t \in (0, 1)$.

We show that $f_1(x) < tf_1(a) + (1-t)f_1(b)$ which by (2.6) is equivalent to

$$\log_2 x + \frac{T(x)}{x} > t\left\{\log_2 a + \frac{T(a)}{a}\right\} + (1-t)\left\{\log_2 b + \frac{T(b)}{b}\right\}. \tag{2.12}$$

By Lemma 2.3 it holds (2.10) and for the concave function $\log_2 x$ we have for $0 < t < 1$

$$\log_2 x > t \log_2 a + (1-t) \log_2 b.$$

Addition with (2.10) yields (2.12), so that indeed $f_1(x) < tf_1(a) + (1-t)f_1(b)$. It follows $f_1(x) < \max\{f_1(a), f_1(b)\}$ so that f_1 cannot have a local maximum at x. $\square$

It follows from (2.7), (2.9), Proposition 2.2 and Proposition 2.4

Proposition 2.5 *The continuous, 1-periodic function $F_1(u)$ in the formula (1.4) of Trollope-Delange has in $[0,1)$ its maximum exactly at $u_{\max} = 0$ with $F_1(0) = 0$, and its minimum exactly at $u_{\min} = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} = 0,4150$ with $F_1(u_{\min}) = \frac{\log 3}{\log 4} - 1 = -0,2075$. The local maxima are exactly the numbers $\frac{\log k}{\log 2} + \ell$ $(k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{Z})$.*

As consequence of formula (1.4) we have the well-known inequality (cf. [5], [3], [8], [9]):

$$\frac{1}{2}\log_2 n - c_1 < \frac{1}{n}S_1(n) \le \frac{1}{2}\log_2 n \tag{2.13}$$

with the optimal constant $c_1 = 1 - \frac{\log 3}{\log 4}$.

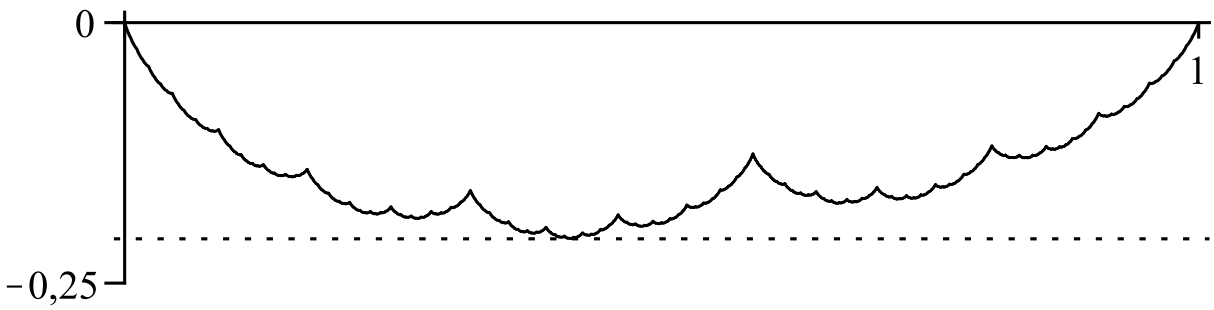


Figure 1: The graph of $F_1(u)$.

3 Counting zeros

In order to determine the number of zeros in binary expansion first we compute the number of all digits. Let $a(k)$ denote the number of all digits in the binary expansion of k, i.e. $a(k) = \ell$ if $2^\ell \le k < 2^{\ell+1}$. We state a formula for the sum

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a(k). \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 *For the number of all digits in the binary representations of the integers* $1, 2, \ldots, n-1$ *we have*

$$\frac{1}{n}A(n) = \log_2 n + \frac{1}{n} + F(\log_2 n) \tag{3.2}$$

where F *is a continuous,* 1*-periodic function which is given by*

$$F(u) = 1 - u - 2^{1-u} \qquad (0 \le u < 1). \tag{3.3}$$

Proof: Obviously, $A(2^\ell) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + \ell \cdot 2^{\ell-1}$. In view of

$$1 + 2t + 3t^2 + \ldots + \ell t^{\ell-1} = \frac{(\ell+1)t^\ell(t-1) - (t^{\ell+1}-1)}{(t-1)^2} \qquad (t \neq 1)$$

we get

$$A(2^\ell) = (\ell+1)2^\ell - 2^{\ell+1} + 1 = (\ell-1)2^\ell + 1.$$

For $0 \le m \le 2^\ell$ we have $A(2^\ell + m) = A(2^\ell) + m(\ell+1)$, i.e.

$$A(2^\ell + m) = (\ell-1)2^\ell + 1 + m(\ell+1) = \ell(2^\ell + m) - 2^\ell + 1 + m.$$

Write $n = 2^\ell + m = 2^\ell(1+x)$ with $0 \le x < 1$ we get in view of $\frac{2^\ell}{n} = \frac{1}{1+x}$ and $\frac{m}{n} = \frac{n-2^\ell}{n} = 1 - \frac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}A(n) &= \ell - \frac{2^\ell}{n} + \frac{m+1}{n} \\ &= \log_2 n + \log_2\left(\frac{2^\ell}{n}\right) - \frac{2^\ell}{n} + \frac{1}{n} + \frac{m}{n} \\ &= \log_2 n + \frac{1}{n} + \left\{1 - \log_2(1+x) - \frac{2}{1+x}\right\}. \end{aligned}$$

This yields the assertion since in view of the periodicity of F we have for $n = 2^\ell(1+x)$

$$F(\log_2 n) = F(\log_2\{2^\ell(1+x)\}) = F(\log_2(1+x)) = F(u)$$

with $1 + x = 2^u$ $(0 \le u < 1)$. □

Theorem 3.2 *For* $k \in \mathbb{N}_0$ *let* $s_0(k)$ *denote the number of zeros of* k *in the binary representation of* k*. Then it holds*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} s_0(k) = \frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{n} + F_0(\log_2 n) \tag{3.4}$$

where F_0 *is a continuous,* 1*-periodic, nowhere differentiable function which is given by*

$$F_0(u) = \frac{1-u}{2} - 2^{1-u} + \frac{1}{2^u}T(2^{u-1}) \qquad (0 \le u < 1). \tag{3.5}$$

Proof: We have $s_0(n) = a(n) - s_1(n)$ where $a(n)$ counts the number of all digits of n in the binary expansion and $s_1(n)$ counts the number of ones. Formulas (1.4) and (3.2) imply (3.4) with $F_0(u) = F(u) - F_1(u)$. The representation (3.5) follows from (2.5) and (3.3). $\square$

Proposition 3.3 *The continuous, 1-periodic function $F_0(u)$ in formula (3.4) has in $[0,1)$ its maximum exactly at $u_{\max} = 2 - \frac{\log 3}{\log 2}$ with $F_0(u_{\max}) = \frac{\log 3}{\log 4} - \frac{3}{2} = -0,707519$, and its minimum exactly at $u_{\min} = 0$ with $F_0(0) = -1$.*

Proof: Put $2^{u-1} = x$ in (3.5) we see that $F_0(u)$ has in $[0,1)$ the same bounds as

$$f_0(x) = -\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}T(x)$$

in $[\frac{1}{2}, 1)$. For $x = \frac{1+t}{2}$ with $0 \le t < 1$ we get in view of (1.1)

$$\begin{aligned} f_0\left(\frac{1+t}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\log_2(1+t) + \frac{1}{2} - \frac{2}{1+t} + \frac{1}{1+t}\left\{\frac{1-t}{2} + \frac{1}{2}T(t)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\log_2(1+t) - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)}T(t). \end{aligned}$$

1. Let $c_0 = f_0(\frac{2}{3}) = \frac{\log 3}{\log 4} - \frac{3}{2}$. We show that for $0 \le t < 1$ we have $f_0(\frac{1+t}{2}) \le f_0(\frac{2}{3}) = c_0$, i.e.

$$-\frac{1}{2}\log_2(1+t) - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)}T(t) \le c_0$$

where we have equality if and only if $t = \frac{1}{3}$. The last inequality is equivalent to $T(t) \le g(t)$ where

$$g(t) = 2 + 2c_0(1+t) + (1+t)\log_2(1+t).$$

The derivative $g'(t) = 2c_0 + \frac{1+\log(1+t)}{\log 2}$ is strictly increasing with $g'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{\log 2} - 1$. For $0 \le t < \frac{1}{3}$ we get by (1.2) with $x = 2t$ that $T(t) = t + \frac{1}{2}T(2t) \le t + \frac{1}{3} = T(\frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} - t)$ where we have used that $\max T = \frac{2}{3} = T(\frac{1}{3})$. In view of $T(\frac{1}{3}) = g(\frac{1}{3})$ and $g'(t) < g'(\frac{1}{3}) < 1$ for $0 \le t < \frac{1}{3}$ it follows $T(t) < g(t)$ for these t. Moreover for $\frac{1}{3} < t < 1$ we have $g(\frac{1}{3}) < g(t)$ since $g'(t) > g'(\frac{1}{3}) > 0$. For these t it holds $T(t) \le T(\frac{1}{3})$ so that in view of $g(\frac{1}{3}) = T(\frac{1}{3})$ indeed we have $g(t) < T(t)$ for $\frac{1}{3} < t < 1$.

2. We have to show that for $0 < t < 1$ we have $f_0(\frac{1+t}{2}) > f_0(\frac{1}{2}) = -1$, i.e.

$$-\frac{1}{2}\log_2(1+t) - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)}T(t) > -1$$

which is equivalent to

$$T(t) - (1+t)\log_2(1+t) + 2t > 0 \qquad (0 < t < 1).$$

From (1.1) we get $T(t) \geq \Delta(t) + \frac{1}{2}\Delta(2t) \geq 2t(1-t)$ for $0 \leq t \leq 1$ so that the inequality is true if the function

$$h(t) = 2t(1-t) - (1+t)\log_2(1+t) + 2t$$

has the property $h(t) > 0$ for $0 < t < 1$. Since

$$h'(t) = 4 - 4t - \frac{\log(1+t)+1}{\log 2}, \qquad h''(t) = -4 - \frac{1}{(1+t)\log 2} < 0,$$

h is strictly concave in $[0,1]$ and by $h(0) = h(1) = 0$ it follows $h(t) > 0$ for $0 < t < 1$. □

So we have

$$\frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{n}S_0(n) < \frac{1}{2}\log_2 n + \frac{1}{n} + c_0$$

with the optimal constant $c_0 = \frac{\log 3}{\log 4} - \frac{3}{2}$.

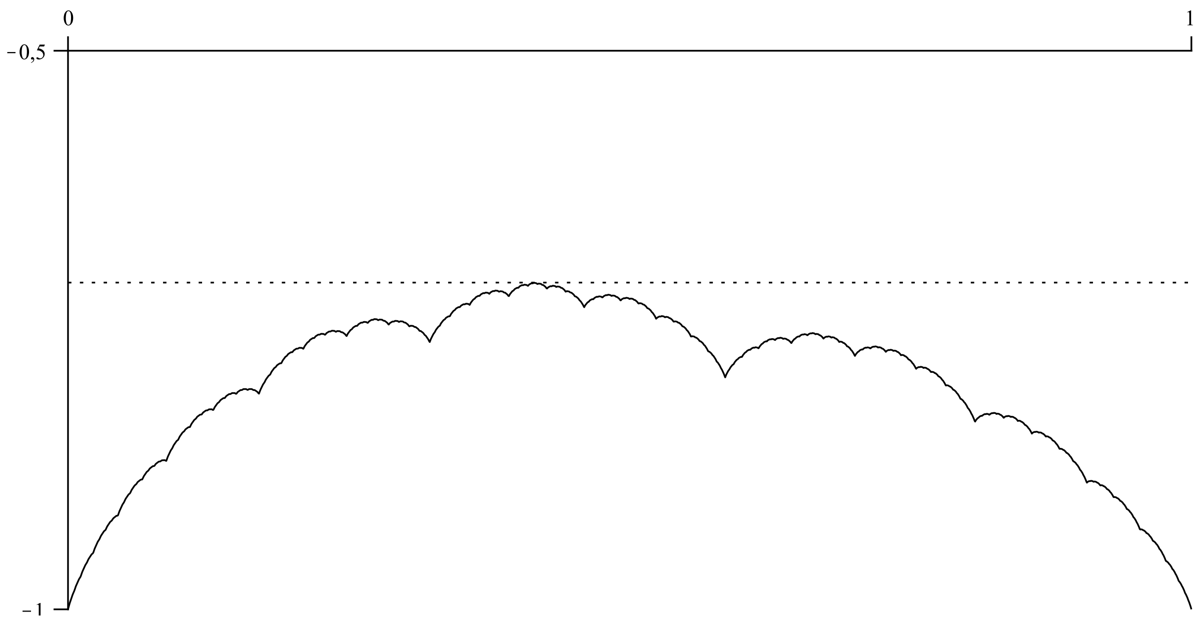


Figure 2: The graph of $F_0(u)$.

4 The alternating sum

Besides of (1.1) we also consider the alternating series

$$\tilde{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Delta(2^n x)}{2^n} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

which can be written as

$$\tilde{T}(x) = T_+(x) - T_-(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.2}$$

where

$$T_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^{2n}x)}{2^{2n}}, \qquad T_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^{2n+1}x)}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}T_+(2x). \tag{4.3}$$

Proposition 4.1 *The function $\tilde{T}$ from (4.1) is continuous, 1-periodic and nowhere differentiable. It can be expressed by the Takagi function T as follows:*

$$\tilde{T}(x) = T(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{T(2^n x)}{2^{n-1}} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Proof: . Obviously, representation (4.1) implies that $\tilde{T}$ is continuous and 1-periodic. Further

$$\tilde{T}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu g(b^\nu x)$$

with $a = \frac{1}{4}$, $b = 4$ and $g(x) = \Delta(x) - \frac{1}{2}\Delta(2x)$ which is piecewise linear (polygonal) but not constant. Since $\tilde{T}$ is not polygonal it follows by Behrend [1], Theorem III on p. 477, that $\tilde{T}$ is nowhere differentiable.

From (4.3) and (1.1) we get $T(x) = T_+(x) + T_-(x)$. Hence

$$T_+(x) = T(x) - T_-(x) = T(x) - \frac{1}{2}T_+(2x)$$

Iteration gives

$$T_+(x) = (-1)^m \frac{1}{2^m} T_+(2^m x) + \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{T(2^n x)}{2^n}$$

for every $m \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}$. As T_+ is bounded we get

$$T_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T(2^n x)}{2^n}.$$

Now from (4.2) and (4.3) it follows the assertion. □

Proposition 4.2 *For $\ell \in \mathbb{N}$ and $k \in \{0, 1, \dots, 4^\ell - 1\}$ the function $\tilde{T}$ from (4.1) satisfies the functional equations*

$$\tilde{T}\left(\frac{k+x}{4^\ell}\right) = \tilde{T}\left(\frac{k}{4^\ell}\right) + \frac{\tilde{s}(k)}{2^{2\ell-1}}x + \frac{1}{4^\ell}\tilde{T}(x) \qquad (0 \le x \le 1) \tag{4.5}$$

where $\tilde{s}(k)$, given by (1.5), denotes the alternating sum of digits of the number k in the binary representation. Moreover, for $n \in \{1, \dots, 4^\ell\}$ we have

$$\tilde{T}\left(\frac{n}{4^\ell}\right) = \frac{1}{2^{2\ell-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{s}(k). \tag{4.6}$$

Proof: First we show that the function T_+ from (4.3) satisfies the functional equation

$$T_+\left(\frac{k+x}{4^\ell}\right) = T_+\left(\frac{k}{4^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s_-(k)}{4\ell}x + \frac{1}{4^\ell}T_+(x) \qquad (0 \le x \le 1) \tag{4.7}$$

where $s_-(k) = a_1 + a_3 + \ldots$ denotes the sum of the digits a_{2j+1} with $2j+1 \le k'$ of the number k in the binary representation (1.3). Since $\Delta(m) = 0$ for $m \in \mathbb{N}_0$ we get from (4.3) that

$$T_+\left(\frac{k}{4^\ell}\right) = \sum_{n=0}^{\ell-1} \frac{\Delta(4^n \frac{k}{4^\ell})}{4^n}$$

and hence

$$T_+\left(\frac{k+x}{4^\ell}\right) - T_+\left(\frac{k}{4^\ell}\right) = \sum_{n=0}^{\ell-1} \frac{\Delta(4^n \frac{k+x}{4^\ell}) - \Delta(4^n \frac{k}{4^\ell})}{4^n} + \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{\Delta(4^n \frac{k+x}{4^\ell})}{4^n}.$$

For $n \ge \ell$ we find with $m = n - \ell \ge 0$ that $\Delta(4^n \frac{k+x}{4^\ell}) = \Delta(4^m k + 4^m x) = \Delta(4^m x)$ so that the last sum in the last equation is equal to $\frac{1}{4^\ell}T_+(x)$. For $n = 0, \ldots, \ell - 1$ there is no integer in the open interval $(4^n \frac{k}{4^\ell}, 4^n \frac{k+1}{4^\ell})$, and hence the both numbers $4^n \frac{k+x}{4^\ell}$ and $4^n \frac{k}{4^\ell}$ belong to the same interval $[m, m+\frac{1}{2}]$ or $[m+\frac{1}{2}, m+1]$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ since $0 \le x \le 1$. Since $\Delta(\cdot)$ is linear in each of these intervals we find that

$$\frac{\Delta(4^n \frac{k+x}{4^\ell}) - \Delta(4^n \frac{k}{4^\ell})}{4^n} = \varepsilon_n \frac{x}{4^\ell}$$

where $\varepsilon_n = +1$ whenever $4^n \frac{k}{4^\ell} \in [m, m+\frac{1}{2})$ and where $\varepsilon_n = -1$ elsewhere. If k has the binary representation (1.3) then $k' < 2\ell$ since $k < 2^{2\ell}$ and

$$k = \sum_{j=0}^{2\ell} a_j 2^j$$

with $a_j = 0$ for $k' < j \le 2\ell$ for which we also write shortly $k = a_{2\ell}a_{2\ell-1}\ldots a_0$. Because of $4^n \frac{k}{4^\ell} = a_{2\ell}\ldots a_{2\ell-2n}, a_{2\ell-2n-1}\ldots a_0$ for $0 \le n \le \ell - 1$ we have $\varepsilon_n = -1$ when $a_{2\ell-2n-1} = 1$ which happens $s_-(k)$ times, and $\varepsilon_n = +1$ when $a_{2\ell-2n-1} = 0$ which happens $\ell - s_-(k)$ times. This yields

$$\sum_{n=0}^{\ell-1} \varepsilon_n = -s_-(k) + \ell - s_-(k) = \ell - 2s_-(k)$$

and hence (4.7) is proved.

Analogously one can show for T_- from (4.3) the relation

$$T_-\left(\frac{k+x}{4^\ell}\right) = T_-\left(\frac{k}{4^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s_+(k)}{4^\ell}x + \frac{1}{4^\ell}T_-(x) \qquad (0 \le x \le 1) \tag{4.8}$$

where $s_+(k) = a_0 + a_2 + \ldots$ denotes the sum of the digits a_{2j} of k in the representation (1.3). Obviously, the alternating sum (1.5) can be written as $\tilde{s}(k) = s_+(k) - s_-(k)$ so that (4.7) and (4.8) imply (4.5) in view of (4.2). Finally, equation (4.6) follows by summation from (4.5) in view of $\tilde{T}(0) = \tilde{T}(1) = 0$. □

5 Alternating binary sums

Equation (4.6) yields for the alternating sum (1.5) the sum formula

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{s}(k) = 2^{2\ell-1}\tilde{T}\left(\frac{n}{4^\ell}\right) \tag{5.1}$$

provided that $n \leq 4^\ell$. We want to determine a formula which is independent of ℓ.

Theorem 5.1 *For the alternating sum (1.5) it holds the formula*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{s}(k) = \tilde{F}(\log_4 n) \tag{5.2}$$

where $\tilde{F}$ is a continuous, 1-periodic, nowhere differentiable function. This function is given by

$$\tilde{F}(u) = \frac{1}{2^{2u+1}}\tilde{T}(4^u) \qquad (u \leq 0) \tag{5.3}$$

where $\tilde{T}$ is given by (4.1) or (4.4) .

Proof: By Proposition 4.1 the representations (4.1) and (4.4) are equivalent. Writing (4.1) in the form

$$\tilde{T}\left(\frac{x}{4}\right) = \Delta\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\tilde{T}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

we see that for $0 \leq x \leq 1$ it holds

$$\tilde{T}\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4}\tilde{T}(x).$$

Hence, the function

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2x}\tilde{T}(x) \qquad (0 < x \leq 1) \tag{5.4}$$

satisfies the equation

$$\tilde{f}\left(\frac{x}{4}\right) = \tilde{f}(x) \qquad (0 < x \leq 1),$$

and we can continue this function for all $x > 0$ such that

$$\tilde{f}(4x) = \tilde{f}(x) \qquad (x > 0). \tag{5.5}$$

It is easy to see that for $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{s}(k) = \tilde{f}(n). \tag{5.6}$$

For given n we choose ℓ so large that $n < 4^\ell$. From (5.1) divided by n we find

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{s}(k) = \frac{2^{2\ell-1}}{n}\tilde{T}\left(\frac{n}{4^\ell}\right) = \tilde{f}\left(\frac{n}{4^\ell}\right) = \tilde{f}(n)$$

where we have used (5.4) and (5.5). If we put

$$\tilde{F}(u) = \tilde{f}(4^u) \qquad (u \in \mathbb{R}) \tag{5.7}$$

then (5.5) is equivalent to $\tilde{F}(u+1) = \tilde{F}(u)$, (5.4) turns over into (5.3) and (5.6) yields formula (5.2). Finally, from (5.3) we see that $\tilde{F}(u)$ is nowhere differentiable since $\tilde{T}$ has this property, cf. Proposition 4.1. □

In order to obtain more information on the functions $\tilde{f}$ and $\tilde{F}$, we need the following result of [2], p. 1005-1007 (cf. in particular formula (3.5) and the representations of x^-, x^+ on p. 1007).

Lemma 5.2 ([2]) *For $a > 2$ the set of numbers*

$$x = (a-1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\xi_\nu}{a^\nu} \qquad (\xi_\nu \in \{0,1\}) \tag{5.8}$$

form a perfect Cantor set $\mathcal{F} \subset [0,1]$ of Lebesgue measure zero. The complement $\mathcal{G} = [0,1]\setminus\mathcal{F}$ is an open Cantor set of measure $|\mathcal{G}| = 1$. This set consists of all numbers of the form

$$x = (a-1)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\xi_\nu}{a^\nu} + \frac{t}{a^{n+1}} \qquad (1 < t < a-1).$$

Lemma 5.3 *Let x be a number in $[0,1]$. Then for all $k \in \mathbb{N}_0$ it holds the inequality*

$$\Delta(4^k x) \leq \frac{1}{4}$$

if and only if x is representable in the form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{4^n} \qquad (\eta_n \in \{0,3\}). \tag{5.9}$$

Proof: Assume that x has the form (5.9). We show that for $k \in \mathbb{N}_0$ we have

$$|4^k x - n_k| \le \frac{1}{4}$$

where n_k is the integer

$$n_k = \eta_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} 4^{k-n}\eta_n. \tag{5.10}$$

In the case $\eta_{k+1} = 0$ it is $n_k \le 4^k x$, and in view of (5.9), (5.10) and $\eta_\nu \le 3$ we have

$$4^k x - n_k = \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\eta_n}{4^{n-k}} \le \frac{3}{4^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m} = \frac{1}{4}.$$

In the case $\eta_{k+1} = 3$ it is $n_k \ge 4^k x$, and in view of the (5.9), (5.10) and $\eta_\nu \ge 0$ we have the estimate

$$n_k - 4^k x = 1 - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\eta_n}{4^{n-k}} \le 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

If x is not of the form (5.9) then according to Lemma 5.2 with $a = 4$ we have the representation

$$x = \sum_{n=1}^{k} \frac{\eta_n}{4^n} + \frac{t}{4^{k+1}} \qquad (1 < t < 3)$$

with a certain $k \in \mathbb{N}_0$. Therefore

$$4^k x = \sum_{n=1}^{k} 4^{k-n}\eta_n + \frac{t}{4}$$

and, in view of $1 < t < 3$, we find

$$\frac{1}{4} < 4^k x - [4^k x] < 1 - \frac{1}{4}.$$

Therefore in this case we have $\Delta(4^k x) > \frac{1}{4}$. $\square$

Proposition 5.4 *The function $\tilde{f}$ from (5.4) satisfies the functional equation*

$$\tilde{f}(x) + \tilde{f}(2x) = \frac{1}{2} \qquad (x > 0). \tag{5.11}$$

We have $\min \tilde{f} = 0$ and $\tilde{f}(x) = 0$ if and only if $x > 0$ has the form

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n 4^n \qquad (\zeta_n \in \{0, 3\}) \tag{5.12}$$

where $\zeta_n = 0$ for $n > \log_4 x$.

Proof: Owing to (5.4) we investigate the function $\tilde{T}(x)$ for $0 < x \le 1$. From (4.1) we get

$$\tilde{T}(x) + \frac{1}{2}\tilde{T}(2x) = \Delta(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

By multiplication with $\frac{1}{2x}$ it follows (5.11) for $0 < x \le \frac{1}{2}$ in view of $\Delta(x) = x$ for these x and (5.4). Equation (5.5) implies the validity of (5.11) for all $x > 0$.

According to (4.1) the function $\tilde{T}$ can be written as

$$\tilde{T}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(4^k x)}{4^k} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.13}$$

where $g(x) = \Delta(x) - \frac{1}{2}\Delta(2x)$ is a periodic function with period 1 which in $[0,1]$ is given by

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{for} \quad \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \\ -2x + \frac{3}{2} & \text{for} \quad \frac{1}{2} < x \le \frac{3}{4} \\ 0 & \text{for} \quad \frac{3}{4} < x \le \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{5.14}$$

Because of $g(x) \ge 0$ for $x \in \mathbb{R}$ we have $\tilde{T}(x) \ge 0$, too. For $0 < x \le 1$ we get from (5.4) that $\min \tilde{f} = \min \frac{1}{2x}\tilde{T}(x) = 0$ since $\tilde{T}(1) = 0$, and $\tilde{f}(x) = 0$ if and only if $\tilde{T}(x) = 0$. Equation (5.13) implies in view of $g(x) \ge 0$ that $\tilde{T}(x) = 0$ if and only if for all $k \in \mathbb{N}_0$ we have $g(4^k x) = 0$. According to (5.14) we have $g(x) = 0$ in [0,1] exactly for $0 \le x \le \frac{1}{4}$ and for $1 - \frac{1}{4} \le x \le 1$, i.e. $\Delta(x) \le \frac{1}{4}$. Consequently, for all $k \in \mathbb{N}_0$ it holds $g(4^k x) = 0$ if and only if $\Delta(4^k x) \le \frac{1}{4}$ so that by Lemma 5.3 we have $\tilde{T}(x) = 0$ for $0 < x \le 1$ if and only if x is of the form (5.9). It follows from (5.4) and (5.5) that $\tilde{f}(x) = 0$ for $x > 0$ if and only if x is of the form (5.12). □

Proposition 5.5 *The continuous, periodic function $\tilde{F}$ in formula (5.2), given by (5.3), satisfies the functional equation*

$$\tilde{F}(u) + \tilde{F}\left(u + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad (u \in \mathbb{R}). \tag{5.15}$$

The bounds of $\tilde{F}$ are $\min \tilde{F} = 0$ and $\max \tilde{F} = \frac{1}{2}$. It holds $\tilde{F}(u) = 0$ if and only if $u = \log_4 x$ where $x > 0$ has the form (5.12). The zeros of $\tilde{F}$ form a Cantor set of Lebesgue measure 0.

Proof: For the periodic function $\tilde{F}$ it holds (5.7). Proposition 5.4 implies that $\tilde{F}$ satisfies the functional equation (5.15) and that $\min \tilde{F} = 0$. It follows from (5.15) that $\max \tilde{F} = \frac{1}{2}$.

According to (5.7) Proposition 5.4 also implies the assertion on the zeros of $\tilde{F}$. By Lemma 5.2 the set of all x of the form (5.9) form a Cantor set of Lebesgue measure 0. This is true also for the zeros of $\tilde{F}$ according to (5.7). □

Remark 5.6 **1.** Functional equation (5.15) implies

$$\int_0^1 \tilde{F}(u)du = \frac{1}{4}. \tag{5.16}$$

2. The map $4^u \mapsto x$ maps the interval $[0,1]$ onto $[1,4]$. In $(1,4]$ the number $x_0 = 3$ is the smallest number of the form (5.12), and $x_1 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \ldots = 4$ the largest such number. Hence, in $(0,1]$ the number $u_0 = \frac{\log 3}{\log 4}$ is the smallest zero of $\tilde{F}$ and $u_1 = 1$ the largest zero of $\tilde{F}$, cf. Figure 3.

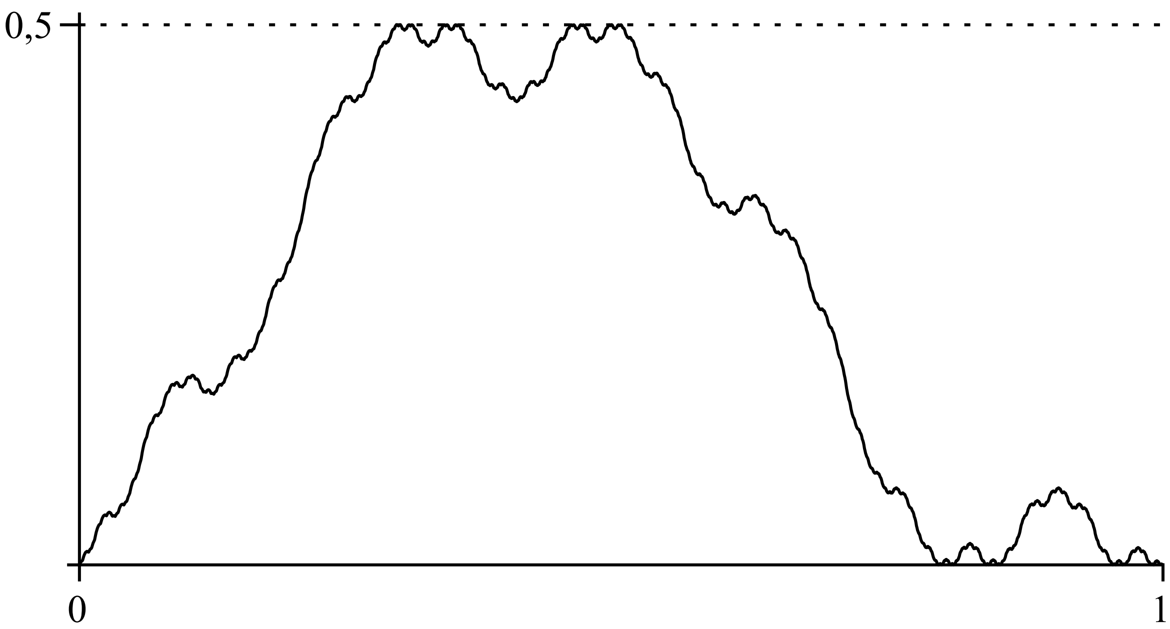


Figure 3: The graph of $\tilde{F}(u)$.

References

[1] **Behrend, F.A. :** *Some remarks on the construction of continuous non-differentiable functions.* Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 463-481 (1949)

[2] **Berg, L.**, and **Krüppel, M. :** *Cantor sets and integral-functional equations.* Z. Anal. Anw. **17**, 997 – 1020 (1998)

[3] **Clements, G. F.**, and **Lindström, B. :** *A sequence of* (± 1) *determinants with large values.* Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 548 – 550 (1965)

[4] **Delange, H. :** *Sur la fonction sommatoire de la fonction "Somme des Chiffres".* Enseign. Math. (2) **21**, 31 – 47 (1975)

[5] **Drazin, M. P.**, and **Griffith, J. S. :** *On the decimal representation of integers.* Proc. Cambridge Philos. Soc. (4), **48**, 555 – 565 (1952)

[6] **Flajolet, F., Grabner, P., Kirschenhofer, P., Prodinger, H.**, and **Tichy, R. F. :** *Mellin transforms and asymptotics: digital sums.* Theoret. Comput. Sci. **123** 291 – 314, (1994)

[7] **Krüppel, M. :** *On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function.* Rostock. Math. Kolloq. **62**, 41 – 59 (2007)

[8] **McIlroy, M. D. :** *The number of* 1*'s in binary integers: bounds and extremal properties.* SIAM J. Comput. **3**, 255 – 261 (1974)

[9] **Shiokawa, I. :** *On a problem in additive number theory.* Math. J. Okayama Univ. 16, 167 – 176 (1974)

[10] **Takagi, T. :** *A simple example of the continuous function without derivative.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan **1**, 176 – 177 (1903)

[11] **Trollope, E. :** *An explicit expression for binary digital sums.* Mat. Mag. **41**, 21 – 25 (1968)

received: December 3, 2007

Author:

Manfred Krüppel
Universität Rostock,
Institut für Mathematik,
Universitätsplatz 1,
18055 Rostock

e-mail: manfred.krueppel@uni-rostock.de

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 55–62 (2008)

Subject Classification (AMS)
Primary 04A05, 20L13;
Secondary 44A35, 46A22

Zoltán Boros, Árpád Száz

Reflexivity, Transitivity, Symmetry, and Anti-Symmetry of the Intersection Convolution of Relations

ABSTRACT. We give some sufficient conditions in order that the intersection convolution $F * G$ of two relations F and G on a groupoid X be reflexive, transitive, symmetric, and anti-symmetric.

Here, $F * G$ is a relation on X such that

$$\big(F * G\big)(x) = \bigcap \big\{ F(u) + G(v) : \quad x = u + v, \quad F(u) \neq \emptyset, \quad G(v) \neq \emptyset \big\}$$

for all $x \in X$.

KEY WORDS. Groupoids, binary relations, intersection convolution, reflexivity, transitivity, symmetry, and anti-symmetry

1 A few basic facts on relations and groupoids

A subset F of a product set $X \times Y$ is called a relation on X to Y. If in particular $F \subset X^2$, then we may simply say that F is a relation on X. Thus, a relation F on X to Y is also a relation on $X \cup Y$.

If F is a relation on X to Y, then for any $x \in X$ and $A \subset X$ the sets $F(x) = \{y \in X : (x, y) \in F\}$ and $F[A] = \bigcup_{a \in A} F(a)$ are called the images of x and A under F, respectively.

Moreover, the sets $D_F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ and $R_F = F[D_F]$ are called the domain and range of F, respectively. If in particular $D_F = X$, then we say that F is a relation of X to Y, or that F is a total relation on X to Y.

Now, a relation F on X is called

(1) reflexive if $x \in F(x)$ for all $x \in D_F$;

(2) symmetric if $y \in F(x)$ implies $x \in F(y)$;

(3) transitive if $y \in F(x)$ and $z \in F(y)$ implies $z \in F(x)$;

(4) anti-symmetric if $y \in F(x)$ and $x \in F(y)$ implies $x = y$;

In particular, a relation f on X to Y is called a function if for each $x \in D_f$ there exists $y \in Y$ such that $f(x) = \{y\}$. In this case, by identifying singletons with their elements, we may simply write $f(x) = y$.

If X is a set and $+$ is a function of X^2 to X, then the function $+$ is called an operation in X and the ordered pair $X(+) = (X, +)$ is called a groupoid even if X is void.

In this case, we may simply write $x + y$ in place of $+(x, y)$ for any $x, y \in X$. Moreover, we may also simply write X in place of $X(+)$ whenever the operation $+$ is clearly understood.

In the practical applications, instead of groupoids, it is usually sufficient to consider only semigroups. However, several definitions and theorems on semigroups can be naturally extended to groupoids.

For instance, if X is a groupoid, then for any $A, B \subset X$, we may naturally write $A + B = \{a+b : \ a \in A, \ b \in B\}$. Moreover, we may also write $x + A = \{x\} + A$ and $A + x = A + \{x\}$ for any $x \in X$.

Note that if in particular X is a group, then we may also naturally write $-A = \{-a : \ a \in A\}$ and $A - B = A + (-B)$ for any $A, B \subset X$. Though, the family $\mathcal{P}(X)$ of all subsets of X is only a semigroup with zero.

2 The intersection convolution of relations

Definition 2.1 *If X is a groupoid, then for any $x \in X$ and $A, B \subset X$, we define*

$$\Gamma(x, A, B) = \big\{(u, v) \in A \times B : \quad x = u + v\big\} .$$

Remark 2.2 Now, in particular, we may simply write

$$\Gamma(x) = \Gamma(x, X, X) .$$

Thus, Γ is just the inverse relation of the operation $+$ in X. Moreover, we have

$$\Gamma\big(x, A, B\big) = \Gamma(x) \cap (A \times B) .$$

Definition 2.3 *If F and G are relations on one groupoid X to another Y, then we define a relation $F * G$ on X to Y such that*

$$\big(F * G\big)(x) = \bigcap \big\{F(u) + G(v) : \quad (u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G)\big\}$$

for all $x \in X$. The relation $F * G$ will be called the intersection convolution of the relations F and G.

Remark 2.4 If in particular F and G are relations of X to Y, then we may simply write

$$\big(F * G\big)(x) = \bigcap_{x=u+v} \big(F(u) + G(v)\big) = \bigcap \big\{F(u) + G(v) : \quad (u, v) \in \Gamma(x)\big\}.$$

A particular case of Definition 2.3 was already considered in [2]. But, the following theorem has only been proved in [3].

Theorem 2.5 *If F and G are relations on a group X to a groupoid Y, then for any $x \in X$ we have*

$$(F * G)(x) = \bigcap \big\{F(x - v) + G(v) : \quad v \in (-D_F + x) \cap D_G\big\} =$$
$$= \bigcap \big\{F(u) + G(-u + x) : \quad u \in D_F \cap (x - D_G)\big\}.$$

Hence, by using that $-X + x = X$ and $x - X = X$ for all $x \in X$, we can immediately get

Corollary 2.6 *If F and G are relations on a group X to a groupoid Y, then for any $x \in X$ we have*

(1) $\big(F * G\big)(x) = \bigcap_{v \in D_G} \big(F(x - v) + G(v)\big)$ *whenever F is total;*

(2) $\big(F * G\big)(x) = \bigcap_{u \in D_F} \big(F(u) + G(-u + x)\big)$ *whenever G is total.*

Hence, it is clear that in particular we also have

Corollary 2.7 *If F and G are relations of a group X to a groupoid Y, then for any $x \in X$ we have*

$$(F * G)(x) = \bigcap_{v \in X} \big(F(x - v) + G(v)\big) = \bigcap_{u \in X} \big(F(u) + G(-u + x)\big).$$

3 Reflexivity and transitivity of the intersection convolution

Theorem 3.1 *If F and G are reflexive relations on a groupoid X, then $F * G$ is a reflexive relation of X.*

Proof: If $x \in X$, then by the reflexivity of F and G, for any $(u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G)$, we have

$$x = u + v \in F(u) + G(v).$$

Therefore, by the corresponding definitions,

$$x \in \bigcap \big\{F(u) + G(v) : \quad (u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G)\big\} = \big(F * G\big)(x),$$

and thus the required assertion is also true.

Theorem 3.2 *If F and G are transitive relations on a groupoid X such that $R_F \subset D_F$ and $R_G \subset D_G$, then $F * G$ is also a transitive relation on X.*

Proof: If $x \in X$,

$$y \in (F * G)(x) \qquad \text{and} \qquad z \in (F * G)(y)\,,$$

then by Definition 2.3

$$y \in \bigcap \left\{ F(u) + G(v) : \quad (u,v) \in \Gamma(x, D_F, D_G) \right\}$$

and

$$z \in \bigcap \left\{ F(s) + G(t) : \quad (s,t) \in \Gamma(y, D_F, D_G) \right\}.$$

Thus, for any $(u,v) \in \Gamma(x, D_F, D_G)$, we have $y \in F(u) + G(v)$. Therefore, there exist $s \in F(u)$ and $t \in G(v)$ such that $y = s + t$. Hence, by using the transitivity of F and G, we can infer that

$$F(s) \subset F\big[F(u)\big] \subset F(u) \qquad \text{and} \qquad G(t) \subset G\big[G(v)\big] \subset G(v).$$

Moreover, by using that

$$s \in F(u) \subset R_F \subset D_F \qquad \text{and} \qquad t \in G(v) \subset R_G \subset D_G,$$

we can also see that $(s,t) \in \Gamma(y, D_F, D_G)$. Hence, since $z \in \big(F * G\big)(y)$, it is clear that

$$z \in F(s) + G(t) \subset F(u) + G(v)\,.$$

Therefore,

$$z \in \bigcap \left\{ F(u) + G(v) : \quad (u,v) \in \Gamma(x, D_F, D_G) \right\} = (F * G)(x)\,,$$

and thus the required assertion is also true.

Now, as an immediate consequence of Theorem 3.1 and 3.2, we can also state

Corollary 3.3 *If F and G are preorder relations on a groupoid X such that $R_F \subset D_F$ and $R_G \subset D_G$, then $F * G$ is a preorder relation of X.*

4 Symmetry and anti-symmetry of the intersection convolution

Unfortunately, concerning the symmetry and anti-symmetry of the intersection convolution, we can only prove the following less satisfactory theorems.

Theorem 4.1 *If F is a symmetric relation of a group X and g is a symmetric function on X, then $F * g$ is a symmetric relation on X.*

Proof: If $x \in X$ and $y \in (F * g)(x)$, then by Corollary 2.6

$$y \in \bigcap_{v \in D_g} \big(F(x-v) + g(v) \big) .$$

Therefore, for any $v \in D_g$, we have

$$y \in F(x-v) + g(v) , \qquad \text{and thus} \qquad y - g(v) \in F(x-v) .$$

Hence, by the symmetry of F, it follows that

$$x - v \in F\big(y - g(v)\big) , \qquad \text{and thus} \qquad x \in F\big(y - g(v)\big) + v .$$

Moreover, by using our assumptions on g, we can see that

$$v = g\big(g(v)\big) .$$

Therefore,

$$x \in F\big(y - g(v)\big) + g\big(g(v)\big) .$$

Hence, it is clear that

$$x \in \bigcap_{v \in D_g} \Big(F\big(y - g(v)\big) + g\big(g(v)\big) \Big) = \bigcap_{t \in R_g} \big(F(y-t) + g(t) \big) .$$

Moreover, by using the symmetry of g, we can see that $R_g = D_g$. Therefore,

$$x \in \bigcap_{t \in D_g} \big(F(y-t) + g(t) \big) = (F * g)(y) ,$$

and thus the required assertion is also true.

By using the second statement of Corollary 2.6, we can quite similarly prove the following

Theorem 4.2 *If f is a symmetric function on a group X and G is a symmetric relation of X, then $f * G$ is a symmetric relation on X.*

Moreover, by using the corresponding definitions, we can easily prove the following

Theorem 4.3 *If F and G are relations on a groupoid X such that $D_{F*G} \subset D_F + D_G$ and there exists an anti-symmetric relation H on X such that*

$$F(u) + G(v) \subset H(u+v)$$

for all $u \in D_F$ and $v \in D_G$, then $F * G$ is an anti-symmetric relation on X.

Proof: Assume that $x, y \in X$ such that

$$y \in (F * G)(x) \qquad \text{and} \qquad x \in (F * G)(y)\,.$$

Then, by Definition 2.3 and the hypotheses of the theorem, we have

$$\begin{aligned} y \in \bigcap \big\{ F(u) + G(v) : \quad (u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G) \big\} \subset \\ \subset \bigcap \big\{ H(u+v) : \quad (u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G) \big\} = \\ = \bigcap \big\{ H(x) : \quad (u, v) \in \Gamma(x, D_F, D_G) \big\} = H(x)\,, \end{aligned}$$

and quite similarly $x \in H(y)$. Hence, by the assumed anti-symmetry of H, it follows that $x = y$. Therefore, the required assertion is also true.

Remark 4.4 If F, G and H are relations on one groupoid X to another Y, then by using the global sum

$$F \oplus G = \big\{ (u+s, v+t) : \quad (u, v) \in F, \ (s, t) \in G \big\}\,,$$

investigated in [1], we can easily see that the following assertions are equivalent:

(1) $F \oplus G \subset H$;

(2) $F(u) + G(v) \subset H(u+v)$ for all $u \in D_F$ and $v \in D_G$.

Therefore, the anti-symmetry of the global sum of two relations should also be investigated.

5 Two illuminating examples

Example 5.1 If in particular

$$F = \big\{ (0,1), (1,0) \big\} \cup \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \big)^2\,,$$

then F is a symmetric relation of $\mathbb{R}$ and the relation $F * F$ is not symmetric.

From the definition of F, it is clear that F is symmetric. Moreover, we can also at once see that

$$\begin{aligned} &F(0) = \{1\}\,, \qquad F(1) = \mathbb{R}\,, \\ &F(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,. \end{aligned}$$

Hence, it is clear that

$$\begin{aligned} &F(1-0) + F(0) = \mathbb{R} + \{1\} = \mathbb{R}\,, \\ &F(1-1) + F(1) = \{1\} + \mathbb{R} = \mathbb{R}\,, \\ &F(1-v) + F(v) = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \big) + \big(\mathbb{R} \setminus \{0\} \big) = \mathbb{R} \quad \text{for all} \quad v \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,. \end{aligned}$$

Therefore,

$$(F * F)(1) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(F(1-v) + F(v) \big) = \mathbb{R} \,.$$

Moreover, we can quite similarly see that

$$\begin{aligned}
&F(0-0) + F(0) = \{1\} + \{1\} = \{2\} \,, \\
&F(0-1) + F(1) = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) + \mathbb{R} = \mathbb{R} \,, \\
&F\big(0-(-1)\big) + F(-1) = \mathbb{R} + \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) = \mathbb{R} \,, \\
&F(0-v) + F(v) = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) + \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) = \mathbb{R} \quad \text{for all} \quad v \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \,.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$(F * F)(0) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(F(0-v) + F(v) \big) = \{2\} \,.$$

Now, since

$$0 \in \mathbb{R} = (F * F)(1) \,, \qquad \text{but} \qquad 1 \notin \{2\} = (F * F)(0) \,,$$

it is clear that $F * F$ is not symmetric.

Example 5.2 If in particular F is the usual order relation on $\mathbb{R}$, that is,

$$F = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leq y \big\} \,,$$

then F and F^{-1} are linear order relations of $\mathbb{R}$ such that the relation $F * F^{-1}$ is not antisymmetric.

To check this, it is convenient to note that

$$F(x) = x + [0, +\infty[\qquad \text{and} \qquad F^{-1}(y) = y + \,]-\infty, 0]$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Namely,

$$\begin{aligned}
&x \in F^{-1}(y) \iff y \in F(x) \iff (x, y) \in F \iff \\
&\qquad \iff x \leq y \iff x \in \,]-\infty, y] \iff x \in y + \,]-\infty, 0] \,.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\big(F * F^{-1}\big)(x) &= \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(F(x-v) + F^{-1}(v) \big) = \\
&= \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(x - v + [0, +\infty[+ v +]-\infty, 0] \big) = \\
&= \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(x - v + v + [0, +\infty[+]-\infty, 0] \big) = \\
&= \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \big(x + \mathbb{R} \big) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}
\end{aligned}$$

for all $x \in \mathbb{R}$, and thus $F * F^{-1} = \mathbb{R}^2$.

Remark 5.3 In view of this example and Corollary 3.3, it would be interesting to construct two equivalence relations F and G of $\mathbb{R}$ such that the relation $F * G$ be non-symmetric.

References

[1] **Glavosits, T.**, and **Száz, Á.** : *Pointwise and global sums and negatives of binary relations.* An. St., Univ. Ovidius Constanta **11**, 97–94 (2003)

[2] **Száz, Á.** : *The intersection convolution of relations and the Hahn–Banach type theorems.* Ann. Polon. Math. **69**, 235–249 (1998)

[3] **Száz, Á.** : *The intersection convolution of relations on one groupoid to another.* Tech. Rep., Inst. Math., Univ. Debrecen **2**, 1–22 (2008)

received: May 15, 2008

Authors:

Zoltán Boros
Institute of Mathematics,
University of Debrecen,
H-4010 Debrecen,
Pf. 12,
Hungary

e-mail: boros@math.klte.hu

Árpád Száz
Institute of Mathematics,
University of Debrecen,
H-4010 Debrecen,
Pf. 12,
Hungary

e-mail: szaz@math.klte.hu

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 63–77 (2008)

Subject Classification (AMS)
35J60, 35J65

Laure Cardoulis[1], Quốc Anh Ngô, Hoang Quoc Toan

Existence of non-negative Solutions for cooperative elliptic Systems involving Schrödinger Operators in the whole Space

ABSTRACT. In this paper, we obtain some new results on the existence of non-negative solutions for systems of the form

$$(-\Delta + q_i)u_i = \mu_i m_i u_i + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x, u_1, ..., u_n) \text{ in } \mathbb{R}^N,\ i = 1, ..., n,$$

where each of the q_i are positive potentials satisfying $\lim_{|x|\to+\infty} q_i(x) = +\infty$, each of the m_i are bounded positive weights, each of the a_{ij}, $i \neq j$, are bounded non-negative weights and each of the μ_i are real parameters. Depending upon the hypotheses on f_i, we obtain some new results by using sub- and super-solution methods and the Schauder Fixed Point Theorem.

1 Introduction

In this paper, we are interested in the existence of non-negative solutions of the following cooperative elliptic system

$$(-\Delta + q_i)u_i = \mu_i m_i u_i + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \mathbb{R}^N, i = 1, ..., n. \tag{1.1}$$

We consider the following hypotheses for each $i = 1, \dots, n$ and $j = 1, \dots, n$

($\mathbf{h_1}$) $q_i \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(p > \frac{N}{2})$ such that $\lim_{|x|\to+\infty} q_i(x) = +\infty$ and $q_i \geq \text{const} > 0$.

($\mathbf{h_2}$) $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ and $a_{ij} \geq 0$ if $i \neq j$.

($\mathbf{h_3}$) $m_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ and there exists $\alpha_i > 0$ such that $m_i(x) \geq \alpha_i > 0$ for all $x \in \mathbb{R}^N$.

[1]Corresponding author

Note that our system is cooperative since $a_{ij} \geq 0$ if $i \neq j$. We will specify later the hypotheses on each f_i and we denote by μ_i real parameters for $i = 1, \ldots, n$.

The variational space is denoted by $V_{q_1}(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times V_{q_n}(\mathbb{R}^N)$ where for $i = 1, \ldots, n$, $V_{q_i}(\mathbb{R}^N)$ is the completion of $D(\mathbb{R}^N)$, the set of C^∞ functions with compact support, under the norm

$$\|u\|_{q_i} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + q_i u^2\right)}. \tag{1.2}$$

We recall that each of the embedding $V_{q_i}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ is compact. We denote by

$$\|u\|_{m_i} = \sqrt{\int_\Omega m_i u^2} \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega).$$

According to the hypothesis (**h$_3$**), $\|\cdot\|_{m_i}$ is a norm in $L^2(\mathbb{R}^N)$, equivalent to the usual norm so the embedding $V_{q_i}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow (L^2(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{m_i})$ is still compact.

We denote by M_i the operator of multiplication by m_i in $L^2(\mathbb{R}^N)$. The operator

$$(-\Delta + q_i)^{-1} M_i : (L^2(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{m_i}) \to (L^2(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{m_i})$$

is positive self-adjoint and compact. So its spectrum is discrete and consists of a positive sequence tending to 0. We denote by λ_i the first eigenvalue and by ϕ_i the corresponding eigenfunction which satisfy

$$(-\Delta + q_i)\phi_i = \lambda_i m_i \phi_i \text{ in } \mathbb{R}^N,\ \lambda_i > 0 \tag{1.3}$$

and $\|\phi_i\|_{m_i} = 1$. We recall that λ_i is simple and that $\phi_i > 0$ (see for examples [1, 2, 4, 5, 15, 16]). By the Courant-Fischer formulas, λ_i is given by

$$\lambda_i = \inf\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \phi|^2 + q_i \phi^2\right)}{\int_{\mathbb{R}^N} m_i \phi^2}, \phi \in D(\mathbb{R}^N) \right\}. \tag{1.4}$$

The aim of this paper is to study the existence of non-negative solutions for the system (1.1). This extends earlier results obtained for the Laplacian operator in a bounded domain (see [12, 13]), for an operator of divergence form in a bounded domain (see [9]), for equations or systems involving Schrödinger operators $-\Delta + q_i$ in $\mathbb{R}^N$ (see [3, 6–8, 10, 11]).

Our paper is organized as follows. Section 2 provides some preliminaries and notations before stating our main result which is given in Section 3. In Section 4, we give some remarks on our hypotheses for a two-by-two system.

2 Preliminaries and Notations

2.1 Review of results for the scalar case $(i = 1)$

We consider here the following equation, in a variational sense,

$$(-\Delta + q)u = \lambda m u + g \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{e}$$

We assume the following: The potential q satisfies ($\mathbf{h_1}$), the weight m satisfies ($\mathbf{h_3}$), the constant λ is a real parameter and finally $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. We denote by $(\lambda_{m,q}, \phi_{m,q})$ the eigenpair of eigenvalue and eigenfunction which satisfy

$$(-\Delta + q)\phi_{m,q} = \lambda_{m,q} m \phi_{m,q} \quad , \quad \lambda_{m,q} > 0, \phi_{m,q} > 0.$$

We recall the following results on the existence of solutions and the Maximum Principle.

Theorem 2.1 (see [11]; Theorems 1.1 and 1.2) *Assume that $\lambda < \lambda_{m,q}$. Then there exists a unique solution $u \in V_q(\mathbb{R}^N)$ for the equation (e). Moreover,*

(i) *the weak Maximum Principle holds: if $g \geq 0$, then this solution u satisfies $u \geq 0$,*

(ii) *the strong Maximum Principle holds too: if $g \geq 0$, $g \neq 0$ then $u > 0$.*

2.2 Notations and Hypotheses

We recall that for each $i = 1, \dots, n$ the eigenpair (λ_i, ϕ_i) is defined by (1.3)-(1.4). Let us denote by Φ the vector defined by

$$^t\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n). \tag{2.1}$$

We assume that for each $i = 1, \dots, n$, the nonlinear term f_i of the system (1.1) satisfies the following hypotheses

($\mathbf{h_4}$) For each $i = 1, \dots, n$

(i) $f_i(x, k_1\phi_1, \dots, k_n\phi_n) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ for all positive numbers $k_1, \dots, k_n$.

(ii) $0 \leq f_i(x, u_1, \dots, u_n)$ for all $u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0$.

(iii) For all $0 \leq u_1 \leq v_1, \dots, 0 \leq u_n \leq v_n$,

$$0 \leq f_i(x, u_1, \dots, u_n) \leq f_i(x, v_1, \dots, v_n).$$

(iv) For all positive real numbers $k_1, \ldots, k_n$,

$$\frac{f_i(x, \eta k_1 \phi_1, \ldots, \eta k_n \phi_n)}{\eta \phi_i} \to 0 \text{ as } \eta \to +\infty, \text{ uniformly in } x.$$

(v) f_i is Lipschitz respect to $(u_1, \ldots, u_n)$ uniformly in x.

For instance, the function $f_i(x, u_1, \ldots, u_n) = \sqrt{u_1 + \cdots + u_n}\ 1_K$ (where 1_K denotes the indicator function on a compact $K \subset \mathbb{R}^N$) satisfies ($\mathbf{h_4}$)(iv).

We denote by $L = (l_{ij})$ the following $n \times n$ matrix be defined by

$$l_{ij} := \begin{cases} (\lambda_i - \mu_i)\alpha_i & \text{if } i = j, \\ -\|a_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} & \text{if } i \neq j, \end{cases} \tag{2.2}$$

for all $i, j = 1, \ldots, n$. We also assume that the following hypothesis holds for some $\beta > 0$

($\mathbf{h_5}$) $(L - \beta I)\Phi \geq 0$

where I is the $n \times n$ identity matrix. Here $(L-\beta I)\Phi \geq 0$ means that the entries of $(L-\beta I)\Phi$ are non-negative functions. Note that the hypothesis ($\mathbf{h_5}$) forces that the coupling is very weak, i. e., with small coefficients a_{ij} and with eigenfunctions ϕ_i which have the same behaviour at infinity: $\frac{\phi_i(x)}{\phi_j(x)}$ is bounded for all $i, j = 1, \ldots, n$ and all $x \in \mathbb{R}^N$. We can now develop our main result in the next section.

3 Existence of solutions

We begin stating our main result, obtained by considering a sub- and a super-solution of the system (1.1) and using the Schauder Fixed Point Theorem. We recall that $(v_1, \ldots, v_n)$ is a sub-solution (resp. a super-solution) of the system (1.1) if for each $i = 1, \ldots, n$, we have

$$(-\Delta + q_i)v_i \leq \mu_i m_i v_i + \sum_{j=1; j\neq i}^{n} a_{ij} v_j + f_i(x, v_1, \ldots, v_n) \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

(resp. $\geq$).

Theorem 3.1 *Assume that the hypotheses* ($\mathbf{h_1}$)-($\mathbf{h_5}$) *are satisfied. Then the system* (1.1) *has at least one non-negative solution in* $V_{q_1}(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times V_{q_n}(\mathbb{R}^N)$.

Proof: First, note that $u_0 = (0, \ldots, 0)$ is a sub-solution of the system (1.1). Then, by hypothesis ($\mathbf{h_5}$), we have $(L - \beta I)\Phi \geq 0$ and so we get for each $i = 1, \ldots, n$,

$$(\lambda_i - \mu_i) m_i \phi_i - \beta \phi_i - \sum_{j=1; j\neq i}^{n} a_{ij}\phi_j \geq 0.$$

Since, by hypothesis (**h$_4$**)(iv), we have for η sufficiently large

$$0 \leq \frac{f_i(x, \eta\phi_1, \ldots, \eta\phi_n)}{\eta\phi_i} \leq \beta,$$

we can write for η sufficiently large

$$(\lambda_i - \mu_i)m_i\eta\phi_i - \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}\eta\phi_j \geq \eta\beta\phi_i \geq f_i(x, \eta\phi_1, \ldots, \eta\phi_n).$$

Thus we have

$$(\lambda_i - \mu_i)m_i\eta\phi_i - \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}\eta\phi_j \geq f_i(x, \eta\phi_1, \ldots, \eta\phi_n). \tag{3.2}$$

Therefore $u^0 := \eta\Phi = (\eta\phi_1, \ldots, \eta\phi_n)$ is a super-solution of the system (1.1).

Now, we define the set $\sigma = [u_0, u^0]$. Let α be a positive real such that for all i, $\mu_i + \alpha > 0$. Let

$$T : (L^2(\mathbb{R}^N))^n \to (L^2(\mathbb{R}^N))^n$$
$$(u_1, \ldots, u_n) = u \mapsto v = (v_1, \ldots, v_n)$$

where for each $i = 1, \ldots, n$

$$(-\Delta + q_i + \alpha m_i)v_i = (\mu_i + \alpha)m_iu_i + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}u_j + f_i(x, u_1, \ldots, u_n) \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{3.3}$$

Note that, by the scalar case, T is well defined for all $u \in \sigma$.

As in [3], we prove now that $T(\sigma) \subset \sigma$. Let $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \sigma$ and $T(u) = v = (v_1, \ldots, v_n)$. By the weak Maximum Principle for the scalar case, since the system (1.1) is a cooperative one and $\alpha > 0$, we get $v_i \geq 0$ for each $i = 1, \ldots, n$. Moreover, we have

$$\begin{aligned}(-\Delta + q_i + \alpha m_i)(\eta\phi_i - v_i) =& (\lambda_i + \alpha)\eta m_i\phi_i - (\mu_i + \alpha)m_iu_i \\ & - \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}u_j - f_i(x, u_1, \ldots, u_n).\end{aligned}$$

By (3.2), we get

$$\begin{aligned}&(-\Delta + q_i + \alpha m_i)(\eta\phi_i - v_i) \\ &\qquad \geq (\mu_i + \alpha)m_i(\eta\phi_i - u_i) + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}(\eta\phi_j - u_j) \\ &\qquad\quad + f_i(x, \eta\phi_1, \ldots, \eta\phi_n) - f_i(x, u_1, \ldots, u_n) \\ &\qquad \geq 0.\end{aligned}$$

By the weak Maximum Principle for the scalar case, we obtain $v_i \leq \eta\phi_i$ for each $i = 1, \dots, n$. Therefore $T(\sigma) \subset \sigma$.

As in [3], we prove now that T is continuous and that $T(\sigma)$ is compact. Let $(u_k)_k$, where $u_k = (u_{1k}, \dots, u_{nk})$, be a sequence in σ and define $T(u_k) = v_k$ where $v_k = (v_{1k}, \dots, v_{nk})$. First, if (u_k) converges to $u = (u_1, \dots, u_n)$ for $\|\cdot\|_{(L^2(\Omega))^n}$, and if $T(u) = v = (v_1, \dots, v_n)$, from (3.3) we have for each $i = 1, \dots, n$ and for all k

$$\begin{aligned}(-\Delta + q_i + \alpha m_i)(v_{ik} - v_i) =& (\mu_i + \alpha) m_i (u_{ik} - u_i) + \sum_{j=1; j\neq i}^{n} a_{ij}(u_{jk} - u_j) \\ &+ f_i(x, u_{1k}, \dots, u_{nk}) - f_i(x, u_1, \dots, u_n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Multiplying (3.4) by $v_{ik} - v_i$ and integrating over $\mathbb{R}^N$, we get

$$\begin{aligned}\|v_{ik} - v_i\|^2_{q_i + \alpha m_i} =& (\mu_i + \alpha) \int_{\mathbb{R}^N} m_i (u_{ik} - u_i)(v_{ik} - v_i) \\ &+ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} a_{ij}(u_{jk} - u_j)(v_{ik} - v_i) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \big(f_i(x, u_{1k}, \dots, u_{nk}) - f_i(x, u_1, \dots, u_n)\big)(v_{ik} - v_i).\end{aligned}$$

Using the hypothesis (**h$_4$**)(v) and the Cauchy-Schwartz inequality, since the coefficients m_i and a_{ij} are bounded, we deduce that there exists a constant $C_1 > 0$ such that

$$\|v_{ik} - v_i\|_{q_i + \alpha m_i} \leq C_1 \sum_{j=1}^{n} \|u_{jk} - u_j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Therefore T is continuous. We prove now that $T(\sigma)$ is compact. Multiplying (3.3) by v_{ik} we have also

$$\|v_{ik}\|^2_{q_i + \alpha m_i} = (\mu_i + \alpha) \int_{\mathbb{R}^N} m_i u_{ik} v_{ik} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} a_{ij} u_{jk} v_{ik} + \int_{\mathbb{R}^N} f_i(x, u_{1k}, \dots, u_{nk}) v_{ik}.$$

Since the coefficients m_i and a_{ij} are bounded, then by the hypothesis (**h$_4$**), we see that $f_i(x, u_{1k}, \dots, u_{nk})$ is bounded too and we can deduce the existence of a constant $C_2 > 0$ and of a constant $C_3 > 0$ such that

$$\|v_{ik}\|_{q_i + \alpha m_i} \leq C_2 \,(\sum_{j=1}^{n} \|u_{jk}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C_3).$$

But $u \in \sigma$. Therefore the sequence $(v_k)_k$ is bounded in $V_{q_1}(\mathbb{R}^N) \times \dots \times V_{q_n}(\mathbb{R}^N)$ and since each of the embedding $V_{q_i}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ is compact, we can find a subsequence of $(v_k)_k$ which is convergent in $(L^2(\mathbb{R}^N))^n$. Therefore $T(\sigma)$ is compact.

By the Schauder Fixed Point Theorem, we deduce the existence of $u \in \sigma$ such that $T(u) = u$. Clearly u is a non-negative solution of the system (1.1). $\square$

As in [14], we can relax the hypotheses on the increasing of each function f_i but assuming stronger hypotheses on the regularity of f_i. For the next result, we will suppose that each function f_i of the system (1.1) satisfies the following hypothesis

($\mathbf{h'_4}$) (i) $f_i(x, u_1, \dots, \eta\phi_i, \dots, u_n) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ for all $\eta > 0$ and all $0 \le u_1 \le \eta\phi_1, \dots, 0 \le u_n \le \eta\phi_n$.

(ii) $0 \le f_i(x, u_1, \dots, u_n)$ for all $u_1 \ge 0, \dots, u_n \ge 0$.

(iii) f_i is of class C^1.

(iv) For all $0 \le u_1 \le \eta\phi_1, \dots, 0 \le u_n \le \eta\phi_n$,

$$\frac{f_i(x, u_1, \dots, \eta\phi_i, \dots, u_n)}{\eta\phi_i} \to 0 \text{ as } \eta \to +\infty, \text{ uniformly in } x.$$

(v) f_i is Lipschitz respect to $(u_1, \dots, u_n)$ uniformly in x.

Following [14], we say that a couple $(u_{01}, \dots, u_{0n}) - (u_1^0, \dots, u_n^0)$ is a sub$-$super-solution of the system (1.1) (Müller type conditions) if for each $i = 1, \dots, n$,

$$u_{0i} \le u_i^0$$

and moreover

$$\begin{cases} 0 \ge (-\Delta + q_i)u_{0i} - \mu_i m_i u_{0i} - \sum_{j=1;j\neq i}^n a_{ij}u_j - f_i(x, u_1, \dots, u_{0i}, \dots, u_n), \\ 0 \le (-\Delta + q_i)u_i^0 - \mu_i m_i u_i^0 - \sum_{j=1;j\neq i}^n a_{ij}u_j - f_i(x, u_1, \dots, u_i^0, \dots, u_n), \end{cases} \tag{3.5}$$

for any $u_j \in [u_{0j}, u_j^0]$.

It is clear that this definition is much more stringent than the natural definition (3.1) where (3.5) are only satisfied for $u_j = u_{0j}$ (for the sub-solution) and for $u_j = u_j^0$ (for the super-solution). Note that if f_i is increasing, both definitions coincide.

Theorem 3.2 *Assume that the hypotheses* ($\mathbf{h_1}$)-($\mathbf{h_3}$), ($\mathbf{h'_4}$) *and* ($\mathbf{h_5}$) *are satisfied. Then the system* (1.1) *has at least one non-negative solution in* $V_{q_1}(\mathbb{R}^N) \times \dots \times V_{q_n}(\mathbb{R}^N)$.

Proof: As in Theorem 3.1, we denote by $u_0 = (0, \dots, 0)$, $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ and by $u^0 = \eta\Phi$ for η sufficiently large positive real defined later. First, we prove that (u_0, u^0) is a couple of sub-super-solution in the sense of (3.5).

Indeed, proceeding as for Theorem 3.1, using hypotheses ($\mathbf{h}_4'$) and ($\mathbf{h}_5$) we have (for η sufficiently large)

$$(\lambda_i - \mu_i) m_i \eta \phi_i \geq \sum_{j=1; j \neq i}^{n} a_{ij} \eta \phi_j + f_i(x, u_1, \ldots, \eta\phi_i, \ldots, u_n) \text{ for any } 0 \leq u_j \leq \eta \phi_j$$

and therefore (since the system (1.1) is cooperative)

$$(\lambda_i - \mu_i) m_i \eta \phi_i \geq \sum_{j=1; j \neq i}^{n} a_{ij} u_j + f_i(x, u_1, \ldots, \eta\phi_i, \ldots, u_n) \text{ for any } 0 \leq u_j \leq \eta \phi_j.$$

We define the set $\sigma = [u_0, u^0]$. Let α be a positive real such that for all i, $\mu_i + \alpha > 0$. Let

$$\begin{gathered} T_\sigma : \sigma \to (L^2(\mathbb{R}^N))^n \\ (u_1, \ldots, u_n) = u \mapsto v = (v_1, \ldots, v_n) \end{gathered}$$

where for each $i = 1, \ldots, n$,

$$(-\Delta + q_i + \alpha m_i + \rho m_i) v_i = (\mu_i + \alpha) m_i u_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{n} a_{ij} u_j + f_i(x, u_1, \ldots, u_n) + \rho m_i u_i \text{ in } \mathbb{R}^N$$

and where $\rho > 0$ is a constant such that $f_i(x, u_1, \ldots, u_n) + \rho m_i u_i$ is increasing in u_i. We can find such ρ by hypotheses ($\mathbf{h}_3$) and ($\mathbf{h}_4'$) since the function f_i is C^1. Still by the scalar case, the operator T_σ is well defined and proceeding as for Theorem 3.1, we can prove that T_σ is continuous and $T_\sigma(\sigma)$ is compact.

Now we prove that $T_\sigma(\sigma) \subset \sigma$. Let $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \sigma$ and $T_\sigma(u) = v = (v_1, \ldots, v_n)$. Note by the scalar case $v_i \geq 0$ for each $i = 1, \ldots, n$. Moreover we have for each $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} (-\Delta + q_i + \alpha m_i + \rho m_i)(\eta\phi_i - v_i) \geq & (\mu_i + \alpha) m_i (\eta \phi_i - u_i) \\ & + f_i(x, u_1, \ldots, \eta\phi_i, \ldots u_n) + \rho m_i \eta \phi_i \\ & - f_i(x, u_1, \ldots, u_n) - \rho m_i u_i \\ \geq & 0. \end{aligned}$$

Since $u_i \leq \eta \phi_i$ and $w_i \mapsto f_i(x, u_1, \ldots, w_i, \ldots, u_n) + \rho m_i w_i$ is increasing, by the scalar case, we obtain $v_i \leq \eta \phi_i$ for each $i = 1, \ldots, n$. Therefore $T_\sigma(\sigma) \subset \sigma$.

By the Schauder Fixed Point Theorem, we deduce the existence of at least one fixed point of T_σ or equivalently, one weak non-negative solution of the system (1.1). $\square$

4 Study of a two-by-two system $(i = 2)$

For a 2×2 cooperative system with constant coefficients a, b, c, d and the same potential q, if we rewrite the system (1.1) under the following form

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = au + bv + f(x, u, v) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ (-\Delta + q)v = cu + dv + g(x, u, v) \text{ in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

the hypothesis (**h₅**), $(L - \beta I)\Phi \geq 0$, means that

$$(\lambda_q - a - b - \beta)\phi_q \geq 0 \text{ and } (\lambda_q - c - d - \beta)\phi_q \geq 0$$

where λ_q is the principal eigenvalue associated with the eigenfunction ϕ_q for the operator $-\Delta + q$ (q being a potential satisfying the hypothesis ($\mathbf{h_1}$)). Since $\phi_q > 0$, ($\mathbf{h_5}$) is equivalent, in this case, to $\lambda_q \geq a + b + \beta$ and $\lambda_q \geq c + d + \beta$. Therefore the hypothesis ($\mathbf{h_5}$) is stronger than the usual hypothesis in [3], [6–11], [12], [13] which is $\lambda_q > a$, $\lambda_q > d$ and $(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) > bc$ or equivalently

$$\begin{pmatrix} \lambda_q - a & -b \\ -c & \lambda_q - d \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

is a non-singular M-matrix. However, for the nonlinear terms of the system (1.1), we consider here in Theorem 3.1 another class of functions f_i (denoted by f and g for $n = 2$) than the one used in [3] or [6–11] (where in these papers, each function f_i satisfies

$$0 \leq f_i(x, u_1, \ldots, u_n) \leq \theta_i$$

for all $u_i \geq 0$ and with θ_i a fixed function in $L^2(\mathbb{R}^N)$).

Moreover, for the system (4.1) when the function g depends only of u ($g(u, v) := g(u)$), using a decoupling method, we can prove the existence of a non-negative solution assuming that the nonlinear term $f(x, u, v)$ satisfies ($\mathbf{h_4}$) and that the 2×2 matrix defined by (4.2) is a non-singular M-matrix (which is the usual condition and a weaker hypothesis than ($\mathbf{h_5}$)).

So we now consider the following cooperative system

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = au + bv + f(x, u, v) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ (-\Delta + q)v = cu + dv + g(x, u) \text{ in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.3}$$

Theorem 4.1 *Assume that the potential q satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_1}$), the coefficients a, b, c, d are real parameters with $b \geq 0$ and $c \geq 0$, the function f satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_4}$) respect to ϕ_q the principal eigenfunction associated with λ_q the first eigenvalue of the operator $-\Delta + q$. Assume also that the function g satisfies the following hypothesis*

($\mathbf{h_6}$) (i) *There exists a constant* $K > 0$ *such that* $0 \le g(u) \le Ku$ *for all* $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $u \ge 0$.

(ii) $g(u_1) \le g(u_2)$ *if* $0 \le u_1 \le u_2$.

(iii) g *is Lipschitz respect to* u *uniformly in* x.

Assume that the 2×2 *matrix* Λ *be defined by*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_q - a & -b \\ -(c+K) & \lambda_q - d \end{pmatrix}$$

is a non-singular M-matrix. Then the system (4.3) *has at least one non-negative solution* $(u, v) \in (V_q(\mathbb{R}^N))^2$.

Proof: We use the decoupling method combined with the sub- and super-solution method. First, we recall that

$$(-\Delta + q)\phi_q = \lambda_q \phi_q \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{4.4}$$

with $\lambda_q > 0$ and $\phi_q > 0$. We proceed as in [1] and we define for $u \ge 0$ the continuous and compact operator

$$Bu := (-\Delta + q - d)^{-1}(cu + g(u)). \tag{4.5}$$

Note that the operator B is well defined since $d < \lambda_q$. Therefore (u, v) is a solution of the system (4.3) if and only if $v = Bu$ and

$$(-\Delta + q - a)u = bBu + f(x, u, Bu) \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{4.6}$$

We denote by $\underline{u} := 0$. By the weak Maximum Principle for the scalar case, since $c \ge 0$ and $g(\underline{u}) \ge 0$, we have $B\underline{u} \ge 0$ and using the hypothesis ($\mathbf{h_4}$), we have also $f(x, \underline{u}, B\underline{u}) \ge 0$. Therefore $\underline{u}$ is a sub-solution of the equation (4.6).

We construct now a super-solution of the equation (4.6) of the form $\overline{u} = \eta\phi_q$ where η will be a real positive parameter defined further on. Note that $\overline{u}$ is a super-solution of the equation if and only if

$$(\lambda_q - a)\eta\phi_q \ge bB\eta\phi_q + f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q). \tag{4.7}$$

We have

$$bB\eta\phi_q = \frac{bc\eta}{\lambda_q - d}\phi_q + b(-\Delta + q - d)^{-1}(g(\eta\phi_q)).$$

By the hypothesis upon g, we have $0 \le g(\eta\phi_q) \le K\eta\phi_q$. Still using the weak Maximum Principle for the scalar case, we deduce that

$$(-\Delta + q - d)^{-1}(g(\eta\phi_q)) \le (-\Delta + q - d)^{-1}(K\eta\phi_q) = \frac{\eta K}{\lambda_q - d}\phi_q.$$

So we get

$$bB\eta\phi_q \leq \frac{b\eta(c+K)}{\lambda_q - d}\phi_q.$$

Moreover, from the hypothesis which assures that Λ is a non-singular M-matrix, we have

$$\frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - b(c+K)}{\lambda_q - d} > 0.$$

Since

$$f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q) \leq f(x, \eta\phi_q, \eta\frac{(c+K)}{\lambda_q - d}\phi_q),$$

by (**h$_4$**), we can choose a positive real η sufficiently large such that

$$0 \leq \frac{f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q)}{\eta\phi_q} < \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - b(c+K)}{\lambda_q - d}.$$

Therefore for η sufficiently large and now fixed, we have

$$bB\eta\phi_q + f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q) \leq \eta\frac{b(c+K)}{\lambda_q - d}\phi_q + \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - b(c+K)}{\lambda_q - d}\eta\phi_q$$

and so (4.7) is satisfied or equivalently $\overline{u} = \eta\phi_q$ is a super-solution of the equation (4.6).

Now we define the operator T on $\sigma = [\underline{u}, \overline{u}]$ by

$$Tu := (-\Delta + q - a)^{-1}(bBu + f(x, u, Bu)). \tag{4.8}$$

Still again, the operator T is well defined since $a < \lambda_q$, $Bu \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and $f(x, u, Bu) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ for all $u \in \sigma$. We prove that $T(\sigma) \subset \sigma$. Let $u \in \sigma$. Since $u \geq 0$ then $Bu \geq 0$ and so $f(x, u, Bu) \geq 0$ by the weak Maximum Principle for the scalar case. Therefore $Tu \geq 0$. We have from (4.7) and (4.8)

$$(-\Delta + q - a)(Tu) = bBu + f(x, u, Bu)$$

and

$$(-\Delta + q - a)\eta\phi_q = (\lambda_q - a)\eta\phi_q \geq bB\eta\phi_q + f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q).$$

So we get

$$(-\Delta + q - a)(\eta\phi_q - Tu) \geq b(B\eta\phi_q - Bu) + f(x, \eta\phi_q, B\eta\phi_q) - f(x, u, Bu) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Moreover, since g is an increasing function with respect to u, by the weak Maximum Principle for the scalar case, we deduce that B is an increasing function with respect to u too. Therefore, using (**h$_4$**) for f, we obtain

$$(-\Delta + q - a)(\eta\phi_q - Tu) \geq 0.$$

The weak Maximum Principle allows us to conclude that $Tu \leq \eta\phi_q$ since $a < \lambda_q$. As for Theorem 3.1, we can prove that T is a continuous operator for the $L^2(\mathbb{R}^N)$-norm and by the compact embedding $V_q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ we get that $T(\sigma)$ is compact.

By the Schauder Fixed Point Theorem, we deduce the existence of $u_0 \in V_q(\mathbb{R}^N)$ such that

$$(-\Delta + q)u_0 = au_0 + bBu_0 + f(x, u_0, Bu_0) \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

Clearly, (u_0, Bu_0) is a non-negative solution of the system (4.3). □

Note that if we add an hypothesis on the nonlinear term g, then we can construct a sub-solution of the equation (4.6) of the form $\underline{u} = \epsilon\phi_q$ and consequently, we get the existence of a positive solution of the system (4.3). This is the following result.

Theorem 4.2 *Assume that the potential q satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_1}$), the coefficients a, b, c, d are real parameters with $b > 0$ and $c \geq 0$, the function f satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_4}$) respect to ϕ_q the principal eigenfunction associated with λ_q the first eigenvalue of the operator $-\Delta + q$. Assume also that the function g satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_6}$) and the following hypothesis*

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{g(s)}{s} \geq \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - bc}{b}.$$

Assume that the 2×2 matrix Λ be defined by

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_q - a & -b \\ -(c + K) & \lambda_q - d \end{pmatrix}$$

is a non-singular M-matrix. Then the system (4.3) has at least one positive solution $(u, v) \in (V_q(\mathbb{R}^N))^2$.

Proof: We proceed as for Theorem 4.1. We construct a sub-solution of the equation (4.6) of the form $\underline{u} = \epsilon\phi_q$ such that $\underline{u} \leq s_0$ where s_0 is a positive real sufficiently small which satisfies

$$\frac{g(s)}{s} \geq \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - bc}{b}$$

for all $0 < s \leq s_0$. This is possible due to the boundedness of the function ϕ_q.

Indeed, since $0 < \epsilon\phi_q \leq s_0$, then

$$g(\epsilon\phi_q) \geq \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - bc}{b}\epsilon\phi_q.$$

Thus, by the Maximum Principle for the scalar case, we have:

$$(-\Delta + q - d)^{-1} g(\epsilon\phi_q) \geq \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - bc}{b(\lambda_q - d)}\epsilon\phi_q$$

and so

$$bB(\epsilon\phi_q) \geq \frac{bc\epsilon}{\lambda_q - d}\phi_q + \frac{(\lambda_q - a)(\lambda_q - d) - bc}{(\lambda_q - d)}\epsilon\phi_q = (\lambda_q - a)\epsilon\phi_q.$$

Since $f(x, \epsilon\phi_q, B\epsilon\phi_q) \geq 0$, we well deduce that $\underline{u} = \epsilon\phi_q$ is a sub-solution of the equation (4.6).

We can conclude as for Theorem 4.1 applying the Schauder Fixed Point Theorem for the operator T defined by (4.8) in the set $[\epsilon\phi_q, \eta\phi_q]$. We have just to verify that $T([\epsilon\phi_q, \eta\phi_q]) \subset [\epsilon\phi_q, \eta\phi_q]$ i.e. if $\epsilon\phi_q \leq u \leq \eta\phi_q$, then $Tu \geq \epsilon\phi_q$. Indeed, from (4.6), since $\epsilon\phi_q$ is a sub-solution of (4.6), we have:

$$(-\Delta + q - a)(Tu - \epsilon\phi_q) \geq b(Bu - B(\epsilon\phi_q)) + f(x, u, Bu) - f(x, \epsilon\phi_q, B\epsilon\phi_q).$$

By the Maximum Principle for the scalar case, since $a < \lambda_q$, we get $\epsilon\phi_q \leq Tu$. □

We conclude giving a uniqueness result. As in [3], we add for that the following hypothesis

($\mathbf{h_7}$) There exists a concave function H such that $f(x, u, v) = b\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v)$ and $g(x, u) = c\frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v)$ for all u, v.

Then, proceeding exactly as in [3], we have the following result.

Theorem 4.3 *Assume that the potential q satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_1}$), the coefficients a, b, c, d are real parameters with $b > 0$ and $c > 0$, the function f satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_4}$), the function g satisfies the hypothesis ($\mathbf{h_6}$). Assume that the 2×2 matrix Λ be defined by*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_q - a & -b \\ -(c + K) & \lambda_q - d \end{pmatrix}$$

is a non-singular M-matrix and the hypothesis ($\mathbf{h_7}$) is satisfied. Then the system (4.3) has a unique positive solution $(u, v) \in (V_q(\mathbb{R}^N))^2$.

References

[1] **Abachti-Mchachti, A.**, and **Flekinger, J.** : *Existence of Positive Solutions for a Non Cooperative Semilinear Elliptic System Defined on un Unbounded Domain.* First European Conference on Parabolic and Elliptic Problem, Pont-à-Mousson, (1991)

[2] **Agmon, S.** : *Bounds on Exponential Decay of Eigenfunctions of Schrödinger Operators.* Schrödinger Operators, (Como, 1984), Springer-Verlag, Berlin, (1985), 1-38

[3] **Alziary, B., Cardoulis, L.**, and **Fleckinger, J.** : *Maximum Principle and Existence of Solutions for Elliptic Systems Involving Schrödinger Operators.* Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. Vol. **91**, N. 1, 47-52 (1997)

[4] **Anane, A. :** *Simplicité et Isolation de la Première Valeur Propre du p-Laplacien avec Poids.* Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série I, 305, 725-728 (1987)

[5] **Brown, K. J.**, and **Lin, S. S. :** *On the Existence of Positive Eigenfunction for an Eigenvalue Problem with Indefinite Weight Function.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. **75**, N. 1, 112-120 (1980)

[6] **Cardoulis, L. :** *Existence of Solutions for Nonnecessarily Cooperative Systems Involving Schrödinger Operators.* Int. Journ. of Math. and Math. Sc. Vol. **27**, N. 12, 725-736 (2001)

[7] **Cardoulis, L. :** *Existence of Solutions for some Semilinear Elliptic Systems.* Rostock. Math. Kolloq. **56**, 29-38 (2002)

[8] **Cardoulis, L. :** *Existence of Solutions for an Elliptic Equation Involving a Schrödinger Operator with Weight in all of the Space.* Rostock. Math. Kolloq. **58**, 53-65 (2004)

[9] **Cardoulis, L. :** *Maximum Principle and Existence of Solutions for Systems Involving* $-div(\rho\nabla)$ *Operator on a Bounded Domain.* Journal of the Egypt. Math. Soc. V. **12(2)**, 109-113 (2004)

[10] **Cardoulis, L. :** *Existence of Solutions for a System Involving Schrödinger Operators with Weights.* Proc. of the Edinburgh Math. Soc. **50**, 611-635 (2007)

[11] **Cardoulis, L. :** *Existence of Solutions for a System Involving Schrödinger Operators with Weights.* Electron. J. Diff. Eqns., Conference **16**, 59-80 (2007)

[12] **de Figueiredo, D. G.**, and **Mitidieri, E. :** *Maximum Principle for Cooperative Elliptic Systems.* Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 310, 49-52 (1990)

[13] **Fleckinger, J., Hernandez, J.**, and **de Thélin, F. :** *On Maximum Principles and Existence of Positive Solutions for Some Cooperative Elliptic Systems.* Diff. and Int. Eq. V. **8**, N. 1, 68-85 (1995)

[14] **Hernández, J. :** *Some Existence and Stability Results for Solutions of Reaction-Diffusion Systems with Nonlinear Boundary Conditions.* Nonlinear Diff. Equa.: Invariance, Stability and Bifurcation **161**, 161-173 (1981)

[15] **Hess, P.**, and **Kato, T. :** *On Some Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems with an Indefinite Weight Function.* Cann P. D. E. **5**, 993-1034 (1984)

[16] **Schaefer, H. H. :** *Topological Vector Spaces.* Macmillan Comp. New York (1966)

received: October 2, 2008

Authors:

Laure Cardoulis
CeReMath/UMR MIP,
Université de Toulouse 1,
21 allées de Brienne,
31000 Toulouse,
France
e-mail: laure.cardoulis@univ-tlse1.fr

Quốc Anh Ngô
Department of Mathematics,
Mechanics and Informatics,
College of Science,
Vietnam National University,
Hanoi,
Vietnam
e-mail: bookworm_vn@yahoo.com

Hoang Quoc Toan
Department of Mathematics,
Mechanics and Informatics,
College of Science,
Vietnam National University,
Hanoi,
Vietnam

Rostock. Math. Kolloq. **63**, 79–91 (2008)

Subject Classification (AMS)
46C05, 47D03, 47H09, 47H10, 47H20

Kriengsak Wattanawitoon, Usa Wannasingha Humphries, Poom Kumam[1]

Strong convergence by new hybrid methods of modified Ishikawa iterations for two asymptotically nonexpansive mappings and semigroups

ABSTRACT. In this paper, we introduce the iterative sequence for two asymptotically nonexpansive mappings and two asymptotically nonexpansive semigroups. Then we prove strong convergence theorems for a common fixed point of two asymptotically nonexpansive mappings and for a common fixed point of two asymptotically nonexpansive semigroups by using the new hybrid methods in a Hilbert space. Moreover, we discuss the problem of strong convergence and we also apply our results to generalizes extend and improve these announced by Plubtieng and Ungchittrakool's result [Strong convergence of modified Ishikawa iterations for two asymptotically nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2306–2315.] and Takahashi et al. [Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 276–286.].

KEY WORDS. strong convergence; nonexpansive mapping; Ishikawa iterations; asymptotically nonexpansive mappings; asymptotically nonexpansive semigroup

1 Introduction

Let E be a real Banach space, C be a nonempty closed convex subset of E, and $T : C \to C$ be a mapping. Recall that T is nonexpansive if

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \qquad \text{for all} \quad x, y \in C.$$

We denote by $F(T)$ the set of fixed points of T, that is $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$. A mapping T is said to be asymptotically nonexpansive [1] if there exists a sequence $\{k_n\}$ with $k_n \geq 1$ for all n and $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ and

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\| \qquad \text{for all} \quad n \geq 1 \quad \text{and} \quad x, y \in C.$$

[1]Corresponding author

If S and T are two (asymptotically) nonexpansive mappings, then the point $x \in F(S) \cap F(T)$ is called the common fixed point of S and T.

Recall also that a one-parameter family $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ of self-mappings of a nonempty closed convex subset C of a Hilbert space H is said to be a (continuous) Lipschitzian semigroup on C (see, e.g., [10]) if the following conditions are satisfied:
(a) $T(0)x = x, \quad x \in C$,
(b) $T(t+s)x = T(t)T(s)x, \quad$ for all $t, s \geq 0, \quad x \in C$,
(c) for each $x \in C$, the map $t \mapsto T(t)x$ is continuous on $[0, \infty)$,
(d) there exists a bounded measurable function $L : (0, \infty) \to [0, \infty)$ such that, for each $t > 0$,
$\|T(t)x - T(t)y\| \leq L_t \|x - y\|, \quad$ for all $x, y \in C$.

A Lipschitzian semigroup $\mathcal{T}$ is called nonexpansive if $L_t = 1$ for all $t > 0$, and asymptotically nonexpansive if $\limsup_{t \to \infty} L_t \leq 1$. We denote by $F(\mathcal{T})$ the set of fixed points of the semigroup $\mathcal{T}$, that is $F(\mathcal{T}) = \{x \in C : T(s)x = x, \quad \forall s > 0\}$.

In 1953, Mann [5] introduced the iteration as follows: a sequence $\{x_n\}$ defined by

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

where the initial guess x_0 is taken in C arbitrarily and the sequence $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ is in the interval $[0, 1]$.

The second iteration process is referred to as Ishikawa's iteration process [2], which is defined recursively by

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) T x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T y_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

where the initial guess x_0 is taken in C arbitrarily and the sequences $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are in the interval $[0, 1]$.

In 2003, Nakajo and Takahashi [6] proposed the following modification of the Mann iteration method for a nonexpansive mapping T in a Hilbert space H:

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \text{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n = \{v \in C : \|y_n - v\| \leq \|x_n - v\|\}, \\ Q_n = \{v \in C : \langle x_n - v, x_n - x_0 \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \end{cases} \tag{1.3}$$

where P_C denotes the metric projection from H onto a closed convex subset C of H. They prove that the sequence $\{x_n\}$ converges weakly to a fixed point of T. Moreover they introduced and studied an iteration process of a nonexpansive semigroup $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$

in a Hilbert space H:

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \text{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du, \\ C_n = \{v \in C : \|y_n - v\| \leq \|x_n - v\|\}, \\ Q_n = \{v \in C : \langle x_n - v, x_n - x_0\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0). \end{cases} \tag{1.4}$$

In 2006, Kim and Xu [3] adapted the iteration (1.3) to a asymptotically nonexpansive mapping in a Hilbert space H:

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \text{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T^n x_n, \\ C_n = \{v \in C : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 + \theta_n\}, \\ Q_n = \{v \in C : \langle x_n - v, x_n - x_0\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \end{cases} \tag{1.5}$$

where $\theta_n = (1-\alpha_n)(k_n^2 - 1)(diamC)^2 \to 0$ as $n \to \infty$. They also proved that if $\alpha_n \leq a$ for all n and for some $0 < a < 1$, then the sequence $\{x_n\}$ converges weakly to a fixed point of T. Moreover, they modified an iterative method (1.4) to the case of an asymptotically nonexpansive semigroup $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ in a Hilbert space H:

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \text{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du, \\ C_n = \{v \in C : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 + \theta_n\}, \\ Q_n = \{v \in C : \langle x_n - v, x_n - x_0\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \end{cases} \tag{1.6}$$

where $\theta_n = (1-\alpha_n)[(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} L_u du)^2 - 1](diamC)^2 \to 0$ as $n \to \infty$.

Recently, Takahashi et al.[9] introduced the modification Mann iteration method for a nonexpansive mapping and nonexpansive semigroup $J = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$. They proved strong convergence theorems in Hilbert spaces by a new hybrid method.

Very recently, Plubtieng and Ungchittrakool [8] modified Ishikawa iteration processes for two asymptotically nonexpansive mappings, and two asymptotically nonexpansive semigroups $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ and $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ with C be a closed convex bounded subset of Hilbert space H. They obtained strong convergence theorems.

In this paper, motivated by Plubtieng and Ungchittrakool's result [8] and Takahashi et al. [9], we prove strong convergence theorems for a common fixed point of two asymptotically nonexpansive mappings and two asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces by using the new hybrid methods, which is introduced by Takahashi et al. [9]. Our results are extend and improve of some previous literature results.

2 Preliminaries

This section collects some lemma which will be used in the proofs for the main results in the next section.

Lemma 2.1 *There holds the identity in a Hilbert space H:*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,$$

for all $x, y \in H$ and $\lambda \in [0,1]$.

Lemma 2.2 (*Opial* [7]). *Let C be a closed convex subset of a real Hilbert space H and let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $F(T) \neq \emptyset$. If $\{x_n\}$ is a sequence in C such that $x_n \rightharpoonup z$ and $x_n - Tx_n \to 0$, then $z = Tz$.*

Lemma 2.3 (*Lin et al.* [4]). *Let T be an asymptotically nonexpansive mapping defined on a bounded closed convex subset of a bouded closed convex subset C of a Hilbert space H. If $\{x_n\}$ is a sequence in C such that $x_n \rightharpoonup z$ and $Tx_n - x_n \to 0$, then $z \in F(T)$.*

Lemma 2.4 (*Nakajo and Takahashi* [6]). *Let H be a real Hilbert space. Given a closed convex subset $C \subset H$ and points $x, y, z \in H$. Given also a real number $a \in \mathbb{R}$. The set $D := \{v \in C : \|y-v\|^2 \leq \|x-v\|^2 + \langle z, v\rangle + a\}$ is convex and closed.*

Lemma 2.5 (*Kim and Xu* [3]). *Let C be a nonempty bounded closed convex subset of H and $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ be an asymptotically nonexpansive semigroup on C. If $\{x_n\}$ is a sequence in C satisfying the properties:*
(a) *$x_n \rightharpoonup z$; and,*
(b) $\limsup_{t\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|T(t)x_n - x_n\| = 0$,
then $z \in F(\mathcal{T})$.

Lemma 2.6 (*Kim and Xu* [3]). *Let C be a nonempty bounded closed convex subset of H and $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ be an asymptotically nonexpansive semigroup on C. Then it holds that*

$$\limsup_{s\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \sup_{x\in C} \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T(u)x\,du - T(s)\left(\frac{1}{t}\int_0^t T(u)x\,du\right) \right\| = 0.$$

3 Convergence to a common fixed point of two asymptotically nonexpansive mappings

In this section, we prove a strong convergence theorem by the new hybrid method of modified Ishikawa iterations for two asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces.

Theorem 3.1 *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and let $S, T : C \to C$ be two asymptotically nonexpansive mappings with sequence $\{s_n\}$ and $\{t_n\}$ respectively such that $F := F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Assume that $\alpha_n \leq a$ for all n and for some $0 < a < 1$ and $\beta_n \in [0, 1]$. Define a sequence $\{x_n\}$ in C by the following algorithm:*

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, C_0 = C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T^n z_n, \\ z_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S^n x_n, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 + \theta_n\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $\theta_n = (1 - \alpha_n)[(t_n^2 - 1) + (1 - \beta_n) t_n^2 (s_n^2 - 1)](\operatorname{diam} C)^2 \to 0$ as $n \to \infty$. Then $\{x_n\}$ converges in norm to $P_F(x_0)$.

Proof: We first show that C_{n+1} is closed and convex for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. From the definition of C_{n+1} it is obvious that C_{n+1} is closed for each $n \geq 0$. By Lemma 2.4, we observe that C_{n+1} is convex.

Next, we show that $F \subset C_n$ for all $n \geq 0$. Indeed, let $p \in F$, we have

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T^n z_n - p\|^2 \\ &= \|\alpha_n (x_n - p) + (1 - \alpha_n)(T^n z_n - p)\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n)\|T^n z_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n) t_n^2 \|z_n - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n)(t_n^2 \|z_n - p\|^2 - \|x_n - p\|^2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

By Lemma 2.1, we get

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|^2 &= \beta_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|S^n x_n - p\|^2 - \beta_n (1 - \beta_n)\|S^n x_n - x_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)(s_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2 - \beta_n (1 - \beta_n)\|S^n x_n - x_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)(s_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Substituting (3.3) in (3.2), we obtain

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n)(t_n^2 (\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)(s_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2) - \|x_n - p\|^2) \\ &= \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n)(t_n^2 (1 + (1 - \beta_n)(s_n^2 - 1)) - 1)\|x_n - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 + ((1 - \alpha_n)(t_n^2 - 1) + (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) t_n^2 (s_n^2 - 1))\|x_n - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 + \theta_n \quad \text{with} \quad \theta_n \to 0. \end{aligned}$$

It follows that $p \in C_{n+1}$ and $F \subset C_{n+1}$ for all $n \geq 0$. Thus $\{x_n\}$ is well defined. From $x_n = P_{C_n} x_0$ and $x_{n+1} = P_{Cn+1} x_0 \in C_{n+1} \subset C_n$, we have

$$\langle x_0 - x_n, x_n - x_{n+1} \rangle \geq 0 \qquad \text{for all } p \in F \quad \text{and } n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

So, for $x_{n+1} \in C_n$, we have,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x_0 - x_n, x_n - x_{n+1} \rangle, \\ &= \langle x_0 - x_n, x_n - x_0 + x_0 - x_{n+1} \rangle, \\ &= -\langle x_n - x_0, x_n - x_0 \rangle + \langle x_0 - x_n, x_0 - x_{n+1} \rangle, \\ &\leq -\|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x_n\| \|x_0 - x_{n+1}\|, \end{aligned}$$

for $n \in \mathbb{N}$. This implies that

$$\|x_0 - x_n\|^2 \leq \|x_0 - x_n\| \|x_0 - x_{n+1}\|,$$

hence

$$\|x_0 - x_n\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\| \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Therefore $\{\|x_0 - x_n\|\}$ is nondecreasing. From $x_n = P_{C_n} x_0$, we also have $\langle x_0 - x_n, x_n - y \rangle \geq 0$, for all $y \in C_n$.
Since $F \subseteq C_n$, we get

$$\langle x_0 - x_n, x_n - p \rangle \geq 0 \quad \text{for all} \quad p \in F(T).$$

Thus, for $p \in F$, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x_0 - x_n, x_n - p \rangle \\ &= \langle x_0 - x_n, x_n - x_0 \rangle + \langle x_0 - x_n, x_0 - p \rangle \\ &= -\|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x_n\| \|x_0 - p\|. \end{aligned}$$

for all $p \in F$ and $n \in \mathbb{N}$.
Hence $\{x_n\}$ is bounded. Thus $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$ exists.
Next, we show that $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$. From (3.4) we have

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|x_n - x_0 + x_0 - x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, x_0 - x_{n+1} \rangle + \|x_0 - x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, x_0 - x_n + x_n - x_{n+1} \rangle + \|x_0 - x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_0 - x_n, x_0 - x_n \rangle - 2\langle x_0 - x_n, x_n - x_{n+1} \rangle + \|x_0 - x_{n+1}\|^2 \\ &\leq \|x_n - x_0\|^2 - 2\|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x_{n+1}\|^2 \\ &= -\|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Since $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$ exists, then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$.
Since $x_{n+1} \in C_{n+1} \subset C_n$, we have $\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \theta_n$, which implies that $\|y_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\theta_n}$. We now claim that $\lim_{n\to\infty} \|T^n z_n - x_n\| = 0$. Indeed, by definition of y_n, we have

$$\begin{aligned} \|T^n z_n - x_n\| &= \frac{1}{1 - \alpha_n} \|y_n - x_n\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha_n} (\|y_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|) \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha_n} (\|x_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\theta_n} + \|x_{n+1} - x_n\|) \to 0 \qquad \text{as} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

By using the same argument as in the proof of [8, Theorem 3.1, pp. 2310], we have $\|S^n x_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$.
Putting $t_\infty = \sup\{t_n : n \geq 1\} < \infty$ and $s_\infty = \sup\{s_n : n \geq 1\} < \infty$, we deduce that

$$\begin{aligned}\|Tx_n - x_n\| &\leq \|Tx_n - T^{n+1}x_n\| + \|T^{n+1}x_n - T^{n+1}x_{n+1}\| + \|T^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq t_\infty\|x_n - T^n x_n\| + \|T^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\| + (1 + t_\infty)\|x_n - x_{n+1}\|.\end{aligned}$$

Since T is uniformly continuous, we have

$$\|Tx_n - x_n\| \to 0, \qquad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}\|Sx_n - x_n\| &\leq \|Sx_n - S^{n+1}x_n\| + \|S^{n+1}x_n - S^{n+1}x_{n+1}\| + \|S^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq t_\infty\|x_n - S^n x_n\| + \|S^{n+1}x_{n+1} - x_{n+1}\| + (1 + s_\infty)\|x_n - x_{n+1}\|.\end{aligned}$$

Since T is uniformly continuous, we have

$$\|Sx_n - x_n\| \to 0, \qquad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Finally, we show that $x_n \to z_0$ where $z_0 = P_F x_0$. By (3.5), (3.6), Lemma 2.3 and boundedness of $\{x_n\}$ we obtain $\emptyset \neq \omega_w(x_n) \in P_F x_0$. By the fact that $\|x_n - x_0\| \leq \|z_0 - x_0\|$ for all $n \geq 0$ where $z_0 = P_F(x_0)$ and with the weak lower semi-continuity of the norm, we have

$$\|x_0 - z_0\| \leq \|x_0 - w\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| \leq \|x_0 - z_0\|,$$

for all $\omega_w(x_n)$. However, since $\omega_w(x_n) \subset F$, we must have $w = z_0$ for all $w \in \omega_w(x_n)$. Thus $\omega_w(x_n) = \{z_0\}$ and then $x_n \rightharpoonup z_0$. Hence, $x_n \to z_0 = P_F x_0$ by

$$\begin{aligned}\|x_n - z_0\|^2 &= \|x_n - x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, x_0 - z_0\rangle + \|x_0 - z_0\|^2 \\ &\leq 2(\|z_0 - x_0\|^2 + \langle x_n - x_0, x_0 - z_0\rangle) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

This completes the proof. □

The following corollary follows from Theorem 3.1 reduces (3.1) to the modified Mann's iteration for an aysmptotically nonexpansive mapping.

Corollary 3.2 *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and let $T : C \to C$ be an asymptotically nonexpansive mapping. Assume that $\alpha_n \leq a$ for all n and for some $0 < a < 1$. Then the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \textit{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)T^n x_n, \\ C_{n+1} = \{v \in C : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 + \theta_n\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{3.7}$$

converges in norm to $P_{F(T)}x_0$, where $\theta_n = (1 - \alpha_n)(k_n^2 - 1)(diam C)^2 \to 0$ as $n \to \infty$.

Proof: By Theorem 3.1, if $S = I, \beta_n = 1$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ then, (3.1) reduces to the modified Mann's iteration for an asymptotically nonexpansive mapping. $\square$

Theorem 3.3 *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let $S, T : C \to C$ be two nonexpansive mappings such that $F = F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. Assume that $\alpha_n \leq 1 - \delta$ for all n and for some $\delta \in (0, 1]$ and $\beta_n \in [b, c]$ for all n and $0 < b < c < 1$, then the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, C_0 = C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T z_n, \\ z_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S x_n, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{3.8}$$

converges in norm to $P_F x_0$.

Proof: Since every nonexpansive mapping is asymptotically nonexpansive mapping and using the same argument as in the proof of Theorem 3.1, we obtain $\|Tx_n - x_n\| \to 0$ and $\|Sx_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Hence, by Lemma 2.2, $w \subset F$ and therefore $\{x_n\}$ converges strongly to $P_F x_0$. $\square$

By Theorem 3.3 reduces (3.8) to the modified Mann's iteration for a nonexpansive mapping, we obtain the following result:

Corollary 3.4 (*Takahashi et al.* [9], *Theorem 4.1*) *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $F(T) \neq \emptyset$. Assume that $\alpha_n \leq 1 - \delta$ for all n and for some $\delta \in (0, 1]$. Then the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 \in C \quad \text{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\| \leq \|x_n - v\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{3.9}$$

converges in norm to $P_{F(T)} x_0$.

4 Convergence to a common fixed point of two asymptotically nonexpansive semigroups

Theorem 4.1 *Let C be a nonempty closed convex subset of a Hilbert space H and let $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \leq t < \infty\}$ and $\mathcal{T} = \{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ be two asymptotically nonexpansive semigroups on C such that $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Assume also that $0 < \alpha_n \leq a < 1$ and*

$0 < b \leq \beta_n \leq c < 1$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\{t_n\}$ is a positive real divergent sequence. Define a sequence $\{x_n\}$ in C by the following algorithm:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, C_0 = C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)z_n du, \\ z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 + \tilde{\theta}_n\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{4.1}$$

where $\tilde{\theta}_n = [(1-\alpha_n)\tilde{t}_n^2 + (1-\alpha_n)(1-\beta_n)\tilde{t}_n^2(\tilde{s}_n^2 - 1)](\operatorname{diam} C)^2 \to 0$ as $n \to \infty$. *(hence $\tilde{t}_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} L_u^T du$ and $\tilde{s}_n = \frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} L_u^S du$). Then $\{x_n\}$ converges in norm to $P_{F(\mathcal{T})\cap F(\mathcal{S})}x_0$.*

Proof: First observe that $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S}) \subset C_n$ for all n. Indeed, we have for all $p \in F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S})$

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du - p\|^2 \\ &= \|\alpha_n(x_n - p) + (1-\alpha_n)(\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du - p)\|^2 \\ &\leq \|\alpha_n(x_n - p) + (1-\alpha_n)\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\|\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)(\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} \|T(u)z_n - p\|du)^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)(\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} L_u^T du)\|z_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)(\tilde{t}_n^2\|z_n - p\|^2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

By Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|^2 &\leq \beta_n\|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)\|\tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} S(u)x_n du - p\|^2 \\ &\quad -\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - \tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} S(u)x_n du\|^2 \\ &\leq \beta_n\|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)(\tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} \|S(u)x_n - p\|du)^2 \\ &\quad -\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - \tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} S(u)x_n du\|^2 \\ &\leq \beta_n\|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)(\tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} L_u^S du)^2\|x_n - p\|^2 \\ &\quad -\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - \tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} S(u)x_n du\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)(\tilde{s}_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2 \\ &\quad -\beta_n(1-\beta_n)\|x_n - \tfrac{1}{s_n}\textstyle\int_0^{s_n} S(u)x_n du\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)(\tilde{s}_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Substituting (4.3) into (4.2) yield,

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|^2 &= \|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)(\tilde{t}_n^2(\|x_n - p\|^2 + (1-\beta_n)(\tilde{s}_n^2 - 1)\|x_n - p\|^2)) \\ &= \|x_n - p\|^2 + ((1-\alpha_n)\tilde{t}_n^2 + (1-\alpha_n)(1-\beta_n)\tilde{t}_n^2(\tilde{s}_n^2 - 1))\|x_n - p\|^2 \\ &\leq \|x_n - p\|^2 + \tilde{\theta}_n. \end{aligned}$$

So, $p \in C_{n+1}$. Hence $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S}) \subset C_n$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. By the same argument as in the proof of Theorem 3.1, C_n is closed and convex, $\{x_n\}$ is well defined. Also, similar to the proof of Theorem 3.1, we also have

$$\|x_n - x_{n+1}\| \to 0.$$

Since $x_{n+1} \in C_{n+1} \subset C_n$, we get

$$\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \tilde{\theta}_n,$$

which in turn implies that

$$\|y_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \sqrt{\tilde{\theta}_n}. \tag{4.4}$$

We can deduce that for all $0 \leq r < \infty$,

$$\begin{array}{rcl} \|S(r)x_n - x_n\| & \leq & \|S(r)x_n - S(r)(\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du)\| \\ & & +\|S(r)(\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du) - \frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du\| \\ & & +\|\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du - x_n\| \\ & \leq & (L_\infty + 1)\|\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du - x_n\| \\ & & +\|S(r)(\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du) - \frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du\| \\ & := & (L_\infty + 1)A_n^S + B_n^S(r), \end{array} \tag{4.5}$$

where $A_n^S := \|\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du - x_n\|$ and $B_n^S(r) := \|S(r)(\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du) - \frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du\|$. We claim that $\lim_{n\to\infty} A_n^S = 0 = \limsup_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} B_n^S(r)$. By Lemma 2.6, we have $\limsup_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} B_n^S(r) = 0$. By the proof of [8, Theorem 4.1, pp. 2312–2313, eqa. (4.4)], we obtain that $\lim_{n\to\infty} A_n^S = 0$. On the other hance, we can deduce that for all $0 \leq r < \infty$,

$$\begin{array}{rcl} \|T(r)x_n - x_n\| & \leq & \|T(r)x_n - T(r)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du)\| \\ & & +\|T(r)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du\| \\ & & +\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du - x_n\| \\ & \leq & (L_\infty + 1)\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du - x_n\| \\ & & +\|T(r)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du\| \\ & := & (L_\infty + 1)A_n^T + B_n^T(r). \end{array} \tag{4.6}$$

where $A_n^T := \|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du - x_n\|$ and $B_n^T(r) := \|T(r)(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du\|$. Moreover, we observe that

$$\begin{aligned} \|x_n - \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)x_n du\| &\leq \|x_n - \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du\| + \|\tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du - \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)x_n du\| \\ &\leq \|x_n - \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du\| + \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} \|T(u)z_n - T(u)x_n\| du \\ &\leq \|x_n - \tfrac{1}{t_n}\textstyle\int_0^{t_n} T(u)z_n du\| + \tilde{t}_n\|z_n - x_n\|. \end{aligned}$$

Since $\|z_n - x_n\| = (1-\beta_n)\|\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du - x_n\| \to 0$ and $\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)z_n du\| \to 0$, we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du\| = 0 \tag{4.7}$$

By (4.7) and Lemma 2.6, we have $\lim_{n\to\infty} A_n^T = 0 = \limsup_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} B_n^T(r)$. We thus conclude from (4.5) and (4.6) that

$$\limsup_{r\to\infty}\ \limsup_{n\to\infty}\|T(r)x_n - x_n\| = 0 = \limsup_{r\to\infty}\ \limsup_{n\to\infty}\|S(r)x_n - x_n\|$$

An application of Lemma 2.5 implies that every weak limit point of $\{x_n\}$ is a member of $F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S})$. Repeating the last part of the proof of Theorem 3.1, we can prove that $P_{F(\mathcal{T})\cap F(\mathcal{S})}(x)$ is the only weak limit point of $\{x_n\}$, hence $\{x_n\}$ weakly convergence to $P_{F(\mathcal{T})\cap F(\mathcal{S})}(x)$, and therefore the convergence is strong. □

Corollary 4.2 *Let C be a bounded closed convex subset of a Hilbert space H and $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \le t < \infty\}$ be an asymptotically nonexpansive semigroup on C. Assume also that $0 < \alpha_n \le a < 1$ for all $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ and $\{t_n\}$ is a positive real divergent sequence. Then, the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 = x \in C \quad \textit{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\|^2 \le \|x_n - v\|^2 + \theta_n\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x), \qquad n = 0,1,2\ldots, \end{cases} \tag{4.8}$$

converges in norm to $P_{F(\mathcal{T})}x_0$. where $\theta_n = (1-\alpha_n)[(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} L_u du)^2 - 1](diamC)^2 \to 0$ as $n \to \infty$.

Proof: By Theorem 4.1, if the semigroup $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \le t < \infty\} = \mathcal{I} := \{I(t) : 0 \le t < \infty\}$ and $\beta_n = 1$, then $S(t)x_n = x_n$ for all n and for all $t > 0$. Hence $\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du = x_n$ for all n and $z_n = x_n$ then, (4.1) reduces to (4.8). □

Theorem 4.3 *Let C be a nonempty closed convex subset of a Hilbert space H and $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \le t < \infty\}$ and $\mathcal{S} = \{S(t) : 0 \le t < \infty\}$ be two nonexpansive semigroups on C. Assume also that $0 < \alpha_n \le a < 1$ and $0 < b \le \beta_n \le c < 1$ for all $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ and $\{t_n\}$ and $\{s_n\}$ are two positive real divergent sequence. If $\mathcal{F} = F(\mathcal{T}) \cap F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, then the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \quad \textit{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)z_n du, \\ z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)\frac{1}{s_n}\int_0^{s_n} S(u)x_n du, \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : \|y_n - v\| \le \|x_n - v\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n}(x), \qquad n = 0,1,2\ldots, \end{cases} \tag{4.9}$$

converges in norm to $P_{F(\mathcal{F})}x_0$.

Proof: By Theorem 4.1 we have

$$\lim_{n\to\infty}\|T(r)x_n - x_n\| = 0 = \lim_{n\to\infty}\|S(r)x_n - x_n\| \text{ for all } 0 \le r < \infty.$$

Hence, by Lemma 2.5, $w \subset F(\mathcal{F})$ and therefore $\{x_n\}$ converges strongly to $P_F x_0$. □

The following corollary follows from Theorem 4.3

Corollary 4.4 (*Takahashi et al.* [9], *Theorem 4.4*) *Let C be a nonempty closed convex subset of a Hilbert space H and $\mathcal{T} = \{T(t) : 0 \le t < \infty\}$ be a nonexpansive semigroup on C. Assume that $0 < \alpha_n \le a < 1$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\{t_n\}$ is a positive real divergent sequence. If $F(\mathcal{T}) \neq \emptyset$, then the sequence $\{x_n\}$ generated by*

$$\begin{cases} x_0 \in C, \quad \textit{chosen arbitrarily}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(u)x_n du, \\ C_{n+1} = \{v \in C : \|y_n - v\| \le \|x_n - v\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n+1}(x_0),, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{4.10}$$

converges in norm to $P_{F(\mathcal{T})}x_0$.

5 Acknowledgements

The authors give thanks to the Faculty of Science KMUTT Research Fund for their financial support. The third author was supported by the Thailand Research Fund and the commission on Higher Education under Grant No. MRG5180034.

References

[1] **Goebel, K.**, and **Kirk, W. A. :** *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **35**, 171–174 (1972)

[2] **Ishikawa, S. :** *Fixed points by a new iteration method.* Proc. Am. Math. Soc. **44**, 147–150 (1974)

[3] **Kim, T. H.**, and **Xu, H. K. :** *Strong convergence of modified Mann iterations for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups.* Nonlinear Anal. **64**, 1140–1152 (2006)

[4] **Lin, P. K., Tan, K. K.**, and **Xu, H. K. :** *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings.* Nonlinear Anal. **24**, 929–946 (1995)

[5] **Mann, W. R. :** *Mean value methods in iteration.* Proc. Am. Math. Soc. **4**, 506–510 (1953)

[6] **Nakajo, K.**, and **Takahashi, W. :** *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups.* J. Math. Anal. Appl. **279**, 372–379 (2003)

[7] **Opial, Z. :** *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings.* Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 591–597 (1976)

[8] **Plubtieng, S.**, and **Ungchittrakool, K. :** *Strong convergence of modified Ishikawa iterations for two asymptotically nonexpansive mappings and semigroups.* Nonlinear Anal. **67**, 2306–2315 (2007)

[9] **Takahashi, W., Takeuchi, Y.**, and **Kubota, R. :** *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces.* J. Math. Anal. Appl. **341**, 276–286 (2008)

[10] **Xu, H. K. :** *Strong asymptotic behavior of almost-robits of nonlinear semigroups.* Nonlinear Anal. **46** (2001) 135–151

received: June 30, 2008

Authors:

Kriengsak Wattanawitoon
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
King Mongkut's University of Technology
Thonburi Bang Mod,
Bangkok 10140,
Thailand

e-mail: s9510105@st.kmutt.ac.th

Poom Kumam
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
King Mongkut's University of Technology
Thonburi Bang Mod,
Bangkok 10140,
Thailand

e-mail: poom.kum@kmutt.ac.th

Usa Wannasingha Humphries
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
King Mongkut's University of Technology
Thonburi Bang Mod,
Bangkok 10140,
Thailand

e-mail: usa.wan@kmutt.ac.th

Hints for Authors

Rostock. Math. Kolloq. appears once or twice per year.

Submission

Papers should be sent by e-mail to

romako@uni-rostock.de

or by mail to

Universität Rostock
Institut für Mathematik
Universitätsplatz 1
D-18051 Rostock

We will only consider original contributions which are related to research areas at the University of Rostock. All papers will be reviewed.

AMS-Subject-Classification

Please add one or two AMS-classification numbers which describe the content of your paper.

Manuscript Format

Papers should be written in German or English. Please send your article as a Latex-file and a pdf-file or a ps-file. The Latex-file should not contain self defined commands.

Authors Adresses

Please add the current complete adresses of all authors including first name / surname / institution / department / street / house number / postal code / place / country / e-mail-address.

Bibliography

Current numbers within the text ([3], [4]; [7, 8, 9]) refer to the corresponding item in the bibliography at the end of the article, which has the headline References. Please follow the structure of the examples:

[3] **Zariski, O.**, and **Samuel, P.:** *Commutative Algebra.* Princeton 1958

[4] **Steinitz, E.:** *Algebraische Theorie der Körper.* J. Reine Angew. Math. **137**, 167-309 (1920)

[8] **Gnedenko, B.W.:** *Über die Arbeiten von C.F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.* In: Reichardt, H. (Ed.): C.F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193-204, Leipzig 1957

Each citation should be written in the original language. Cyrillic letters must be transliterated as it is usual in libraries.

Hinweise für Autoren

Das Rostock. Math. Kolloq. erscheint ein- bis zweimal pro Jahr.

Einreichen
Senden Sie bitte Ihre Arbeiten per e-mail an

romako@uni-rostock.de

oder per Post an

Universität Rostock
Institut für Mathematik
Universitätsplatz 1
D-18051 Rostock

Wir berücksichtigen nur Originalarbeiten, die in Bezug zu einem der Rostocker Arbeitsgebiete stehen. Alle Arbeiten werden begutachtet.

AMS-Subject-Klassifikation
Bitte geben Sie zur inhaltlichen Einordnung der Arbeit ein bis zwei Klassifizierungsnummern (AMS-Subject-Classification) an.

Manuskript
Manuskripte sollen in Deutsch oder Englisch abgefasst sein. Bitte senden Sie uns Ihre Arbeit als als LaTeX- und als PDF–Datei bzw. PS-Datei. In der LaTeX-Datei sollten selbst definierte Befehle vermieden werden.

Adressen der Autoren
Die aktuelle, vollständige Adresse des Autors sollte enthalten: Vornamen Name / Institution / Struktureinheit / Straße Hausnummer / Postleitzahl Ort / Land / e-mail-Adresse.

Literaturzitate
Literaturzitate sind im Text durch laufende Nummern (vgl. [3], [4]; [7, 8, 10]) zu kennzeichnen und am Schluss der Arbeit unter der Zwischenüberschrift **Literatur** zusammenzustellen. Hierbei ist die durch die nachfolgenden Beispiele veranschaulichte Form einzuhalten.

[3] **Zariski, O.**, and **Samuel, P.:** *Commutative Algebra.* Princeton 1958

[4] **Steinitz, E.:** *Algebraische Theorie der Körper.* J. Reine Angew. Math. **137**, 167-309 (1920)

[8] **Gnedenko, B.W.:** *Über die Arbeiten von C.F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.* In: Reichardt, H. (Ed.): C.F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193-204, Leipzig 1957

Die Angaben erfolgen in Originalsprache; bei kyrillischen Buchstaben sollte die (bibliothekarische) Transliteration verwendet werden.