

KLAUS-DIETER DREWS

Mathematische Aspekte im Werk der Astronomischen Uhr von St. Marien zu Rostock

Die monumentale Uhr aus dem Jahre 1472 zeigt in ihrem oberen Teil, einem prächtig gestalteten zweimal 12stündigen römischen Zifferblatt, neben der Tageszeit, auf die der Stundenzeiger weist, auch den Lauf der Sonne und des Mondes durch den Tierkreis an.



*Astronomische Uhr in St. Marien, oberer Teil,
6.8.2007 15 Uhr*

In der Nähe der Enden des Stundenzeigers befinden sich ferner die ‚Planetenstunden‘-Scheibe (HORAS PLANETARUM), deren Zeiger auf den jeweiligen Stundenregenten, abhängig vom Wochentag, weist, sowie am gegenüberliegenden Ende die sogenannte Sebes-Scheibe, an deren 24stündigem Ziffernfeld nochmals auf die Tagesstunde gewiesen wird.

Im unteren Teil der Uhr wird an der großen Kalenderscheibe das Tagesdatum angezeigt, aber es befinden sich auf dieser Scheibe zahlreiche weitere Angaben. Für Einzelheiten hierüber sowie aus der Geschichte der Uhr sei verwiesen auf die Publikationen [12], [13] von Herrn M. SCHUKOWSKI, dessen große Verdienste um die Uhr sich schon über Jahrzehnte erstrecken.

Erwähnt werden müssen der mittägliche (und mitternächtliche) Apostelumgang, vorbei an einer segnenden Christusfigur, sowie das Musikwerk, durch das stündlich stets weihvoll als Glockenspiel eine (nahezu beliebig einzu-gebende) Choralmelodie erklingt.

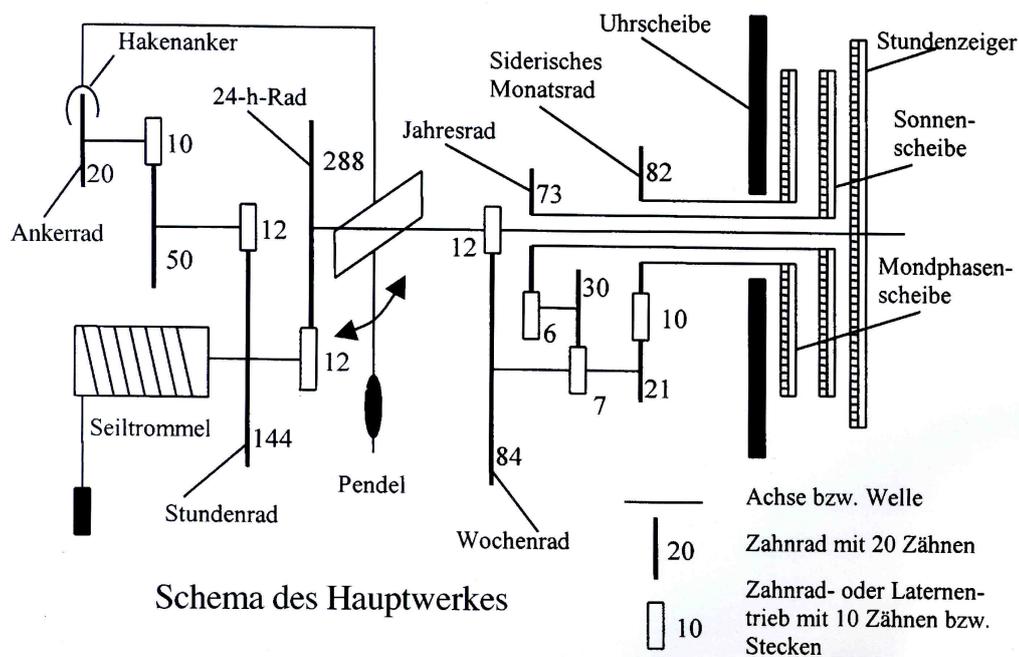


Astronomische Uhr in St. Marien, 22.8.2007 15 Uhr

Wenn sich Scharen von Besuchern an der Uhr und deren Anzeigen erfreuen, und wenn diese in Gänze oder doch im wesentlichen wahrgenommen werden, so beruht das Zutreffen der Anzeigen auf glänzenden Konzeptionen. Dennoch muß der Uhr geholfen werden, weil es zunehmende Abweichungen vor allem in der Mondanzeige gäbe, wenn die Einstellung nicht von

Zeit zu Zeit korrigiert würde. Gerade hierzu werden nachfolgend das Zahnräderwerk der Uhr analysiert, Approximationen der Anzeigen an die naturgegebenen Verhältnisse beurteilt und daraus Vorschläge für Einstellungskorrekturen über einen längeren Zeitraum abgeleitet, Untersuchungen und Einsichten, die sich in der bisherigen Literatur zur Uhr nicht finden. Hinzu kommt ein Blick auf die Planetenstunden-Scheibe und ihre nach mehr als 1¹/₂ Jahrhunderten letztendlich angepaßte Funktionsweise.

Für die Symbole der Sonne und des Mondes an der Uhr, die ja den Lauf der Himmelskörper modellieren, verwende ich die Benennungen *Modell-Sonne* bzw. *Modell-Mond*. Genauer ist das Sonnensymbol am Rand einer sich drehenden Scheibe befestigt, der oben liegenden Sonnenscheibe mit einem kreisförmigen Ausschnitt. In diesem Ausschnitt werden Mondphasen sichtbar, wechselnd bedeckte Mondgesichter, mit denen eine zweite, darunterliegende Scheibe bemalt und an deren Rand das Mondsymboll befestigt ist. Beide Scheiben drehen sich konzentrisch mit dem Stundenzeiger aber entgegengesetzt zu ihm linksherum.



Aus [13], mit freundlicher Erlaubnis des Autors

1 Die Modell-Sonne

Ausgangspunkt für den Lauf des Uhrwerkes ist ein Pendel mit der Schwingungsdauer 3s, das über Ankerhaken ein 20zinkiges (angetriebenes) Steigrad hemmt, welches somit genau eine volle Umdrehung pro Minute vollführt, kurz 1 Drehung pro Minute, d.h. $60 \cdot 24$ Drehungen pro Tag (d). Durch drei nachfolgende Übersetzungen mit den Zahnradverhältnissen $\frac{10}{50}$, $\frac{12}{144}$, $\frac{12}{288}$ werden diese Drehungen (wegen $60 \cdot 24 \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{12}{144} \cdot \frac{12}{288} = 1$) zu 1 Drehung pro Tag oder

eben $\frac{360^\circ}{1d}$ auf die Achse des Stundenzeigers übertragen, der sich wie erwähnt über ein zweimal 12stündiges Zifferblatt bewegt. Von der Achse des Stundenzeigers wird im Verhältnis $\frac{12}{84}$ ($= \frac{1}{7}$) die Bewegung des *Wochenrades* gewonnen, das sich somit um $\frac{360^\circ}{7d}$ dreht. Von der Achse des Wochenrades nun werden sowohl die Bewegung der Modell-Sonne als auch die des Modell-Mondes abgenommen. Für die Achse der Modell-Sonne ergibt sich mit den nacheinanderfolgenden Übersetzungsverhältnissen $\frac{7}{30}$, $\frac{6}{73}$, daß sie sich um $\frac{7}{30} \cdot \frac{6}{73} \cdot \frac{360^\circ}{7d}$ dreht, d.h. um $\frac{360^\circ}{365d}$.

Einsicht 1 *Die Modell-Sonne vollführt in Normaljahren mit 365 Tagen genau einen Umlauf. In Schaltjahren wandert sie unjustiert um einen Tag (knapp ein Grad) zu weit.*

2 Der Modell-Mond

2.1 Gegebene Konstanten

Die Drehbewegung der Achse des Wochenrades wird durch Zahnräder im Verhältnis $\frac{21}{82}$ auf die Achse des Modell-Mondes übertragen:

Einsicht 2 *Der Modell-Mond dreht sich um $\frac{21}{82} \cdot \frac{360^\circ}{7d}$, d.h. pro Tag um $\frac{3}{82} \cdot 360^\circ$ oder um 3 Zähne seines 82er-Rades.*

Zwischen die Zahnräder mit 21 bzw. 82 Zähnen ist noch eins mit 10 Zähnen (Stecken) geschaltet, das für die Übersetzungsverhältnisse, die uns interessieren, ganz unwesentlich ist. Aber erstens kehrt dieses Rad den Drehsinn sinnvoll nochmals um, und zweitens befindet sich genau hier die Stelle – im Jahr 2000 lange vergeblich gesucht, schließlich im Januar 2001 wiederentdeckt von den Herren U. NATH, Pastor em., und H. Süß, seinerzeit tätig an hiesiger Universitätsbibliothek – wo man den Modell-Mond entkoppeln kann, um ihn unabhängig vom übrigen Werk neu zu justieren.

Was aber bedeutet das Verhältnis $\frac{21}{82}$? Im nachstehenden Teilabschnitt 2.2 erfolgt eine Interpretation und Würdigung, in 2.3 und dann in 4 werden Schlußfolgerungen gezogen.

Zunächst aber ein Blick auf den zugrundeliegenden Lauf des Naturmondes. Als Konstante für den *synodischen* Monat (Mond), der Zeitspanne zwischen zwei gleichen Mondphasen, sie sei hier mit b bezeichnet, gilt $b = 29,530\,588\,853d$ ($= 29d\,12h\,44m\,2,87\dots s$), in der größten Genauigkeit aus der hier betrachteten Literatur.

Es handelt sich bei b allerdings um einen Durchschnittswert, in Wahrheit bewegt sich der Naturmond nicht so regelmäßig, seine Erdumlaufbahn ist das Resultat zahlreicher Einflüsse, sie ist „die komplizierteste im ganzen Sonnensystem und dementsprechend vielfältig sind die Rhythmen, die sich in der Mondbewegung überlagern“ ([14] S. 195). Für die Schwankungen

der *Lunationen*, das sind die tatsächlichen Zeitspannen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden, wollen wir, zumindest qualitativ, sogleich noch Gründe einsehen.

In [7] Kap. 47 wird ein Algorithmus zur Berechnung der Mondphasen präsentiert, der auf „neuer Mondtheorie“ und „Theorie für die Sonne“ beruht, dort findet sich der zitierte Wert von b als Anfangskoeffizient. Die diversen im Algorithmus zu bestimmenden Summanden entziehen sich zunächst überwiegend einer anschaulichen Interpretation, geben jedoch einen Eindruck vom Endpunkt der Geschichte zur Entwicklung genauer Bewegungsbeschreibungen seit den Anfängen vor Tausenden von Jahren bis ins 20. Jahrhundert, wie sie faszinierend in [10] Kap. 6 geschildert wird. Man mußte abkommen davon, Ellipsenbahnen an den Anfang zu stellen, sondern mit „speziellen einfachen Lösungen des Dreikörperproblems“ beginnen, um den Einfluß der Sonne gebührend zu berücksichtigen, und dann „zusätzliche Schwankungen und Verschiebungen überlagern“ (nach [10] S. 164).

Für die beabsichtigten qualitativen Einsichten allerdings beziehen wir uns allein auf die KEPLERSchen Gesetze. Wichtig werden die *Apsiden* von Erde und Mond, d.h. *Aphel* und *Perihel*, Sonnenferne bzw. -nähe der elliptischen Erdbahn, sowie *Apogäum* und *Perigäum*, Erdferne bzw. -nähe der elliptischen Mondbahn. In je einer Lunation geschieht zunächst konstant

ein voller Umlauf des Mondes bez. der Erde um den Polarwinkel 360°
in $27d\ 7h\ 43m\ 11,6s$ ([4] S. 51), dem konstanten *siderischen* Monat.

Hinzu kommt durch die inzwischen erfolgte Weiterbewegung der Erde um einen Polarwinkel $\Delta\varepsilon$ auf ihrer Bahn bez. der Sonne

ein weiteres Bahnstück $\Delta\mu$ für den Mond, das er zurücklegen muß, um wieder die erforderliche Neumondstellung zwischen Erde und Sonne zu erreichen (währenddessen $\Delta\varepsilon$ noch etwas zunimmt).

Nach dem zweiten KEPLERSchen Gesetz ist in der Nähe des Aphels der Erde bei konstantem siderischen Monat das $\Delta\varepsilon$ kleiner, dagegen in der Nähe des Perihels größer, jeweils als der Durchschnitt. Diese Verhältnisse übertragen sich unmittelbar auf das genannte Bahnstück $\Delta\mu$ für den Mond.

Liegt die Neumondstellung nun außerdem in der Nähe der Apsiden des Mondes, und zwar das kleinere $\Delta\mu$ beim Perigäum, so ist nach demselben KEPLERSchen Gesetz die benötigte Zeit für $\Delta\mu$ noch zusätzlich verkürzt, hingegen ist für das größere $\Delta\mu$ beim Apogäum des Mondes die benötigte Zeit zusätzlich verlängert. Somit resultieren für Neumondstellungen beim Perigäum im Aphel (Sommer auf der nördlichen Hemisphäre) relativ kurze und beim Apogäum im Perihel (Winter) relativ lange Lunationen.

Aphel und Perihel fallen im übrigen nicht auf die Sonnenwenddaten, sie liegen erst Anfang Juli bzw. Januar.

In erwähntem [7] werden auf S. 354 als absolute Extrema für den Zeitraum 1900 bis 2100 kürzeste Lunationen von $29d\ 6h\ 35m$ (bis zum Neumond am 24.7.1903 und am 15.7.2053) sowie eine längste von $29d\ 19d\ 55m$ (bis zum Neumond am 23.1.1974) angegeben, das sind Abweichungen vom Wert b um mehr als $6h$ bzw. $7h$.

Nachrechnungen [16] lassen relative Extrema analog erkennen, auch für den Vollmond, auf den sich die qualitativen Erörterungen leicht übertragen. Periodizitäten sind nicht zu erwarten, denn z.B. dreht sich die Apsidenlinie (große Achse) der Mondbahn in ca. 8,85 Jahren einmal voll in Laufrichtung des Mondes ([4] S. 51), so daß Neumondstellungen bei den Apsiden der Erdbahn von Jahr zu Jahr in andere Bereiche der Mondbahn fallen.

Solchen Schwankungen kann der Modell-Mond natürlich nicht gerecht werden. Er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, und die muß sich orientieren an der ‚Durchschnittskonstanten‘ b für den synodischen Monat. Hinzu kommt, daß zu gewissen Zeiten die wahren Lunationen mehrfach nacheinander z.B. kürzer als b ausfallen, erst weiter abnehmend, dann wieder ansteigend, und dabei summieren sich die Vorlaufzeiten des Neumondes gegenüber dem ‚Durchschnittslauf‘. Für den Modell-Mond bedeutet dies, daß er sich dann jeweils (aus einem Vorsprung) am Ende zu relativ maximalem Rückstand verspätet. Analog erklären sich relativ maximale Vorausläufe sowie beides auch für den Vollmond; eine wesentliche Ergänzung aber erfolgt in Abschnitt 2.3.

Eine Näherung für b läßt sich bereits aus Erkenntnissen des Altertums gewinnen: Um das Jahr 432 v. Chr. entdeckte der Athener METON, daß 235 synodische Monde (recht gut) 19 Jahren entsprechen. Nimmt man das (spätere) Julianische Jahr von $365,25d$, so wird $19 \cdot 365,25d/235 = 6939,75d/235 = 29,53085 \dots d$; METON hatte seinerzeit $6940d$ in 19 Jahren.

Bei der Gregorianischen Reform 1582 wurde einerseits durch die seitherige Regel für den Wegfall von drei Schalttagen in 400 Jahren der Kalender besser an die Sonnenstellung im Tierkreis angepaßt, diese Korrektur verhindert eine ‚Abwanderung‘ des Datums 21.3. in Richtung Sommer. Außerdem aber wurde in der Reform der Lauf des Mondes genauer erfaßt und der Berechnung des Osterdatums weit in die Zukunft eingefügt, hier wirkt sich der genauere Wert b für den synodischen Mond aus, und darauf sei am Rande eingegangen.

Der erste Vollmond ab dem 21.3. (eingeschlossen) bestimmt die *Ostergrenze*, am Sonntag nach diesem Termin ist Ostern. Die Ostergrenze als spezielles Vollmonddatum wird für jedes Jahr formal (nicht direkt astronomisch) bestimmt, sie durchläuft 19jährige Zyklen, die mindestens für ein Jahrhundert unverändert bleiben.

(Zur Herleitung bzw. Präsentation der ‚GAUSSschen Osterformel‘ s. z.B. [1], [5].)

Die Abfolge der *Ostergrenzen* ist insoweit unabhängig vom Schaltjahrsstatus. Fällt nun allerdings gregorianisch in einem Säkularjahr ein Schalttag aus, so erhöhen sich (i. allg.) alle Daten der Ostergrenzen ab dann um einen Tag (der stets in den 18. „korrigierte“ 19.4. wird zum 21.3.).

Für den Lauf von 235 synodischen Monden in 19 Jahren hat man heutzutage genauer $235 \cdot b - 19 \cdot 365, 25d = 6939, 688380 \dots d - 6939, 75d = -0, 061619 \dots d$. Um (absolut) diese Zeitspanne tritt der 235. Vollmond nach 19 Jahren eher ein, seine Stellung im Tierkreis hat sich verändert, was zusätzlich zur eben genannten Korrektur der Ostergrenzen berücksichtigt werden muß.

Sieht man nun auf 2500 Jahre, so wird $2500 \cdot (-0, 061619 \dots d) / 19 = -8, 1078 \dots d$, und daher müssen die Ostergrenzen in dieser Zeit um 8 Tage vorversetzt werden. Das erfolgt in der Gregorianischen Reform, unter einer Zwischenkorrektur bis zum Jahr 1800, für nachfolgende Zeiträume von je 2500 Jahren durch Vorversetzung der Ostergrenzen um je einen Tag 7mal nach je 300 Jahren, zuerst 2100, und dann einmal nach 400 Jahren, das ist 4300. (2100 aber wird diese Vorversetzung durch die Datumserhöhung wegen Ausfalls des Schalttages kalendarisch annulliert, so daß ‚unsere‘ ab 1900 geltenden Ostergrenzen noch bis 2199 unverändert bleiben. Unter ihnen fehlt der 21.3., daher ist der eigentlich früheste Ostertermin am 22.3. in diesen Zeiten unmöglich – zuletzt 1818, wieder 2285; aber 2008 ist immerhin am 23.3. Ostern – dann wieder 2160.)

Nach 10 solchen Perioden von 2500 Jahren hat sich der Mond jedoch, wie obige Rechnung zeigt, um $81d$ statt $80d$ verschoben, spätestens dann muß die Osterformel modifiziert werden. Dies muß sogar viel eher geschehen wegen des immer noch ungenauen Gregorianischen Jahres, $365, 2425d$ statt $365, 24219879d$ ([4] S. 41) im tropischen Jahr, mehr als $1d$ zu groß in 3400 Jahren, in solchem Zeitraum muß ein weiterer Kalendertag entfallen, wofür es noch keine Festlegung gibt – im Jahr 4000, wenn spekuliert werden darf. (Überlegungen zur Periodizität der Osterformel sind also müßig, wenn auch in [5] für sie die Minimalperiode von 5.700.000 Jahren bestimmt wird, ebenfalls angegeben in [7]; während dieser Zeitspanne wären aber der 21.3. und mit ihm Ostern zunächst in Richtung Sommer gewandert und dann sogar mehrfach durch alle Jahreszeiten.)

2.2 Eine Erklärung für das Übersetzungsverhältnis 21/82

Analog zur scheinbaren Bewegung in der Ekliptik kreisen an der Uhr Symbole von Mond und eben von Sonne. Der Betrachter schaut auf die Umlaufebene, wobei ihm zusätzlich Mondphasen angezeigt werden im eingangs erwähnten Ausschnitt der oberen Scheibe. Regelmäßig in einem synodischen Monat b , z.B. von einem Neumond zum nächsten, muß der Modell-Mond, genauso wie in der Beschreibung des vorigen Abschnitts für den Naturmond, einen vollen Umlauf von 360° und das Bahnstück $\Delta\mu$ zurücklegen, welches hier nun von der Weiterbewegung der Modell-Sonne herrührt.

Setzen wir für den Modell-Mond statt $\frac{21}{82}$ ein gesuchtes Übersetzungsverhältnis V an, so bewegt er sich im Zeitraum b nach Einsicht 2 um $b \cdot V \cdot \frac{360^\circ}{7d}$, die Modell-Sonne hingegen nach

Einsicht 1 um $b \cdot \frac{360^\circ}{365d}$, deshalb muß gelten

$$b \cdot V \cdot \frac{360^\circ}{7d} = 360^\circ + b \cdot \frac{360^\circ}{365d}$$

und somit

$$V = 7 \cdot \left(\frac{1d}{b} + \frac{1}{365} \right) \quad (= 0,2562204\dots, \text{ dimensionslos}).$$

Statt vom synodischen könnte man zur Bestimmung von V evtl. einfacher auch vom siderischen Monat und dazu einem 360° -Umlauf des Modell-Mondes ausgehen. Synodische Monate sind durch die geläufigen Neu- und Vollmondstellungen sowie deren allgemein zugängliche Termine naheliegender und werden im folgenden zu Vergleichszwecken herangezogen.

Wegen des doch etwas komplizierten Wertes von b , und damit von V , sind nun gute Näherungsbrüche für V gesucht, Übersetzungsverhältnisse in nicht zu großen Zahlen, auch abseits der dezimalen Näherungen.

Ergebnisse hierzu liefert die Theorie der *Kettenbrüche* (z.B. in [9], z.T. in [15]).

Mit der für die weiteren Zwecke ausreichenden Genauigkeit (im Grunde der METONischen) $29,530d < b < 29,531d$ gilt $0,25620 < V < 0,25623$.

Wir bestimmen den Kettenbruch der kleineren Schranke $v := 0,2562 (= \frac{2562}{10000} = \frac{1281}{5000})$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{5000/1281} = \frac{1}{3 + 1157/1281} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1281/1157}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + 124/1157}} = \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1157/124}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + 41/124}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{124/41}}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3 + \frac{1}{41}}}}} \end{aligned}$$

Gefunden sind somit die Zahlen $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = 3, a_5 = 41$, die *Teilnenner* des Kettenbruchs für v . Errechnet wurden sie durch sukzessive Divisionen mit Rest entsprechend dem EUKLIDischen Algorithmus, und wir bestimmen über ihn auch die ersten Teilnenner von $v' := 0,25623 (= \frac{25623}{100000})$, der größeren Schranke für V :

$$100000 = \underline{3} \cdot 25623 + 23131,$$

$$25623 = \underline{1} \cdot 23131 + 2492,$$

$$23131 = \underline{9} \cdot 2492 + 703,$$

$$2492 = \underline{3} \cdot 703 + 383.$$

Die ersten vier Teilnenner 3, 1, 9, 3 von v' stimmen also mit a_1 bis a_4 von v überein (die weiteren für v' sind 1, 1, 5, 12, 1, 1, 2).

Man erhält für v und v' die *Hauptnäherungsbrüche* (in dieser Aufeinanderfolge)

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{10}{39}, \quad \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}}} = \frac{31}{121}.$$

Für die (eo ipso gekürzten) Brüche gilt $\frac{1}{4} < \frac{31}{121} < v < V < v' < \frac{10}{39} < \frac{1}{3}$, aber ferner:

- (I) Jeder dieser Brüche p/q ist eine *beidseitig* ‚beste‘ Näherung von v (und von v'), d.h., alle beliebigen anderen Brüche, und zwar auf beiden Seiten von v (oder von v'), die mindestens so nahe an v (oder an v') liegen wie p/q , haben Nenner größer als q (nach [9] S. 46).

Außer den genannten Hauptnäherungen gibt es die *Nebennäherungsbrüche*. Sie werden aus beliebigen aufeinanderfolgenden Hauptnäherungsbrüchen p/q und r/s gebildet und liegen zwischen diesen: $\frac{p}{q} < \frac{p + c \cdot r}{q + c \cdot s} < \frac{r}{s}$ oder $\frac{r}{s} < \frac{p + c \cdot r}{q + c \cdot s} < \frac{p}{q}$ mit $0 < c < a$;

ist hierin $\frac{r}{s}$ aus gewissen Teilennern gewonnen worden, so bezeichnet a den drauffolgenden Teilnenner, und auch c sei ganzzahlig gewählt. Die Nebennäherungen liegen auf derselben Seite von v und v' wie $\frac{p}{q}$, und nähern sich v und v' mit wachsendem c .

($\frac{p + a \cdot r}{q + a \cdot s}$ ist die nächste Hauptnäherung.)

Für beliebige Näherungsbrüche von v und v' gilt (nach [9] S. 49-51):

- (II) Jeder Bruch, der zwischen zwei in der Größe aufeinanderfolgenden Näherungen liegt (Haupt- und Nebennäherungen sind hier gemeint), hat einen größeren Nenner als die beiden Näherungen, er kommt somit als ‚beste‘ Näherung nicht in Frage.
- (III) Wird eine Nebennäherung mit $c > a/2$ gebildet, so ist sie eine beidseitig ‚beste‘ Näherung von v (von v'). Bei $c < a/2$ ist sie nur einseitig ‚beste‘, auf der anderen Seite von v (von v') liegt r/s mit kleinerem Nenner näher.

Mit den Hauptnäherungen $10/39$ und $31/121$ erhält man beispielsweise:

$$\frac{31}{121} < v < \frac{10 + c \cdot 31}{39 + c \cdot 121} < \frac{10}{39}, \quad 0 < c < a_5 = 41 \quad (\text{bei } c = a_5 = 41 \text{ entsteht } \frac{1281}{5000} = v).$$

Die Nenner dieser Nebennäherungen sind größer als 121, daraus folgt nach (II):

- (IV) Zwischen v und $\frac{10}{39}$ liegen nur Brüche, deren Nenner größer als 121 sind.

Aus den Hauptnäherungen $1/4$ und $10/39$ folgt andererseits:

$$\frac{1}{4} < \frac{1+c \cdot 10}{4+c \cdot 39} < v < v' < \frac{10}{39}, \quad 0 < c < a_4 = 3 \quad (\text{bei } c = a_4 = 3 \text{ entsteht } \frac{31}{121}).$$

Für $c = 1$ ergibt sich die Nebennäherung $\frac{11}{43}$, die linksseitig näher an v liegt als $\frac{1}{4}$, rechtsseitig jedoch liegt wegen $c < a_4/2$ nach (III) $\frac{10}{39}$ (mit kleinerem Nenner) näher, eben als nach (I) beidseitig ‚beste‘ Näherung für v und v' .

$$\text{Aber für } c = 2 \text{ gewinnt man } \frac{21}{82}.$$

Nun gilt $\frac{21}{82} < \frac{31}{121} < v < V < v' < \frac{10}{39}$. Nach (III) ist $\frac{21}{82}$ wegen $c = 2 > a_4/2$ beidseitig ‚beste‘ Näherung von v und v' , liegt somit näher als $\frac{10}{39}$. Nach (II) sind die Nenner aller Brüche zwischen $\frac{21}{82}$ und $\frac{31}{121}$ größer als 121, und mit (IV) folgt insgesamt (auch für V):

Einsicht 3 Das Übersetzungsverhältnis $\frac{21}{82}$ für den Antrieb des Modell-Mondes ist so günstig gewählt, daß es näher am theoretisch gewünschten Verhältnis V liegt als alle Brüche auf beiden Seiten von V mit Nennern bis 120.

Besser mit nächstgrößem Nenner ist $\frac{31}{121}$ und dies auch beiderseits von V .

Beiläufig erwähnt werde noch $v < \frac{103}{402} < V < \frac{72}{281} < v'$, wobei zwischen v und v' die Nenner aller weiteren Brüche größer als 402 sind.

2.3 Bewertung von Abweichungen zwischen Modell-Mond und Naturmond

Den modellierten synodischen Mond b_M der Uhr bestimmen wir nun bei gegebenem Wert des Übersetzungsverhältnisses V aus der ersten Gleichung des vorigen Abschnittes 2.2:

$$b_M \cdot V \cdot \frac{360^\circ}{7d} = 360^\circ + b_M \cdot \frac{360^\circ}{365d}.$$

Es wird

$$b_M = \frac{1}{\frac{V}{7} - \frac{1}{365}} d,$$

und für den Modellwert $21/82$ von V errechnet man

$$b_M = \frac{1}{\frac{21}{82 \cdot 7} - \frac{1}{365}} d = \frac{82 \cdot 365}{3 \cdot 365 - 82} d = \frac{29930}{1013} d, \quad \text{das sind } 29d \ 13h \ 6,1 \dots m.$$

Einsicht 4 Die Termine für künftige Neu- und Vollmondstellungen an der Uhr lassen sich mit $b_M = \frac{29930}{1013}d$ aus bekannten Ausgangswerten sukzessiv bestimmen.

Der modellierte synodische Mond b_M von $29d\ 13h\ 6,1\dots m$ ist gegenüber dem wahren synodischen Mond b von $29d\ 12h\ 44,0\dots m$ ca. $22min$ zu groß.

In vier Jahren verliert der Modell-Mond gegenüber dem Naturmond modellbedingt $(b_M - b) \cdot \frac{4 \cdot 365 + 1}{b}d$, das sind ziemlich genau $18h\ 11m$ (oder fast $4h\ 33m$ im Jahr).

Pro synodischem Mond b ist der Verlust nämlich $b_M - b$.

(Für den erwähnten besseren Näherungswert $31/121$ von V ergäbe sich b_M zu

$$\frac{1}{\frac{31}{121 \cdot 7} - \frac{1}{365}}d = 29d\ 12h\ 48,0\dots m, \text{ also ca. } 4min \text{ zu groß,}$$

für die naive dezimale Näherung $0,256 (= \frac{256}{1000} = \frac{32}{125})$ von V (s. Abschnitt 2.2) jedoch zu

$$\frac{1}{\frac{0,256}{7} - \frac{1}{365}}d = 29d\ 13h\ 23,6\dots m, \text{ also sogar fast } 40min \text{ zu groß, und dies bei dem noch größeren Nenner } 125, \text{ dezimal eigentlich sogar } 1000.)$$

Die an der Uhr, bei genaueren Beobachtungen, festzustellenden Differenzen zwischen Modell-Mond und Naturmond resultieren aber wie in 2.1 gesehen neben der soeben behandelten Ursache wesentlich aus Schwankungen im Lauf des Naturmondes, die im Modell nicht realisierbar sind. Eine Beurteilung der Ganggenauigkeit des Modell-Mondes durch spontanen Vergleich etwa bei Neu- oder Vollmond ist somit wenig aussagekräftig.

Die Durchschnittswerte der Zeitdifferenzen zwischen Modell-Mond und Naturmond, d.h. der vorzeichenbehafteten Rückstände des Modell-Mondes, an Neu- und Vollmondterminen in den Jahren 2004 bis 2007 z.B. betragen $-6h\ 23m$ (25 Termine), $-2h\ 4m$ (25 Termine), $2h\ 34m$ (24 Termine) bzw. $7h\ 43m$ (25 Termine), Werte aus den Nachrechnungen in [16], ein jährlicher Verlust des Modell-Mondes um etwa $4^{1/2}h$ nach Einsicht 4 deutet sich an.

Extreme Rückstände in diesem Zeitraum sind:

Modell-Neumond $-14h\ 43m$ am 15.8.2004 13:04, $16h\ 49m$ am 13.8.2007 17:50,

-Vollmond $-17h\ 34m$ am 6.3.2004 6:40, $20h\ 13m$ am 24.12.2007 22:27.

Der durchschnittliche Rückstand von Neu- und Vollmond der Uhr in den vier Jahren 2004 - 2007 berechnet sich zu 26min und ist auch das Ergebnis einer am 5.3.2004 erfolgten Justierung, erstmals unter (vermeintlich) voller Einsicht in die Gegebenheiten. Für den vorliegenden Zeitraum ist diese Durchschnittsabweichung minimal, s. dazu Abschnitt 4.

3 Die Scheibe HORAS PLANETARUM, die ‚Planetenstunden‘-Scheibe

Auf der Scheibe sind die seit alters bekannten, im Tierkreis ‚umlaufenden sieben Gestirne‘ angeordnet: Saturn, Jupiter, Mars, Sonne (Soll), Venus, Merkur, Mond (Luna) befinden sich in dieser Reihenfolge mit Symbolen und Namen viermal linksherum in 28 abgeteilten Sektoren. In einem inneren Kreis liest man HORAS PLANETARUM. Die Kreisscheibe ist drehbar auf ihrer Achse gelagert, diese Achse fest am Stundenzeiger der Uhr, und vor der Scheibe befindet sich ein roter Zeiger.



HORAS PLANETARUM

Montag, 30.7.2007 5 Uhr



Montag, 6.8.2007 15 Uhr



Mittwoch, 22.8.2007 15 Uhr

Zurück bis zu den Sumerern und Babyloniern im 4. Jt. v. Chr. reicht die Kenntnis der 7 umlaufenden Gestirne, angeordnet nach der Länge ihrer Umlaufzeiten. Diese Anzahl 7 gilt als eine der Ursachen für die Siebentagewoche. Vermutlich haben die Juden diese Woche schon früh übernommen, im Alten Testament gibt es spätestens im 6. Jh. v. Chr. Erwähnungen. Im 1. vorchristlichen Jh. gewann im römischen Reich die unveränderliche Zeiteinteilung in Siebentage-Wochen immer mehr an Bedeutung und ist so auch zu uns gekommen.

„Mit der Siebentage-Woche gekoppelt war die Belegung sowohl der Tage als auch der 24 Stunden eines Tages mit astrologischen Symbolen und Sinngehalten“: Für jeden Wochentag und seine Stunden ergab sich eine Abfolge von 24 *Stundenregenten*, indem die eingangs genannte Sequenz der 7 Gestirne periodisch fortgesetzt wird; dabei erkennt man in dem jeweiligen Regenten der ersten Tagesstunde gleichzeitig den *Tagesregenten*.

Es beginnt z.B. am Sonntag in der ersten Stunde mit dem Tagesregenten Sonne, dann folgen Stunde für Stunde Venus, Merkur, Mond, Saturn, Jupiter, Mars, in der 8. Stunde wieder Sonne, auch in der 15. und 22. Stunde, anschließend Venus, Merkur für die 23. und 24. Stunde, und danach steht für die erste Stunde am Montag sein Tagesregent Mond. In weiterer Folge stehen u.a. die Tagesregenten Mars am Dienstag, Merkur am Mittwoch, Jupiter am Donnerstag, Venus am Freitag, Saturn am Samstag. (Bemerkenswert sind z.B. die Namen Sonntag, Montag, mardi, mercredi (franz. Dienstag, Mittwoch), Saturday (engl. Samstag)).

„Mit dem Aufkommen der Schlaguhren an Rathäusern und Kirchen wurde allmählich die schon früh von babylonischen und später auch von ägyptischen Astronomen eingeführte Teilung des Volltages in 24 gleiche Abschnitte (*Äquinoktialstunden*) für den Alltag übernommen.“ „Die kleine (halbe oder deutsche) ‚Uhr‘ zählte von Mitternacht an zweimal 12 Stunden. Sie setzte sich in Deutschland ab der zweiten Hälfte des 14. Jh. immer mehr durch.“ (Diese Absätze nach [8] Abschnitte 1.2 und 3.4.)

Hinter der angesprochenen Scheibe nun befindet sich ein Getriebe mit zwei Zahnrädern im Verhältnis $\frac{24}{28}$, das 28er-Rad ist dabei konzentrisch an die Scheibe montiert, das 24er-Antriebsrad drehbar auf seiner Achse am Stundenzeiger befestigt aber durch ein Kontergewicht gleichstehend ausgerichtet.

Folgende Realisierungen sind denkbar und sind auch aufgetreten.

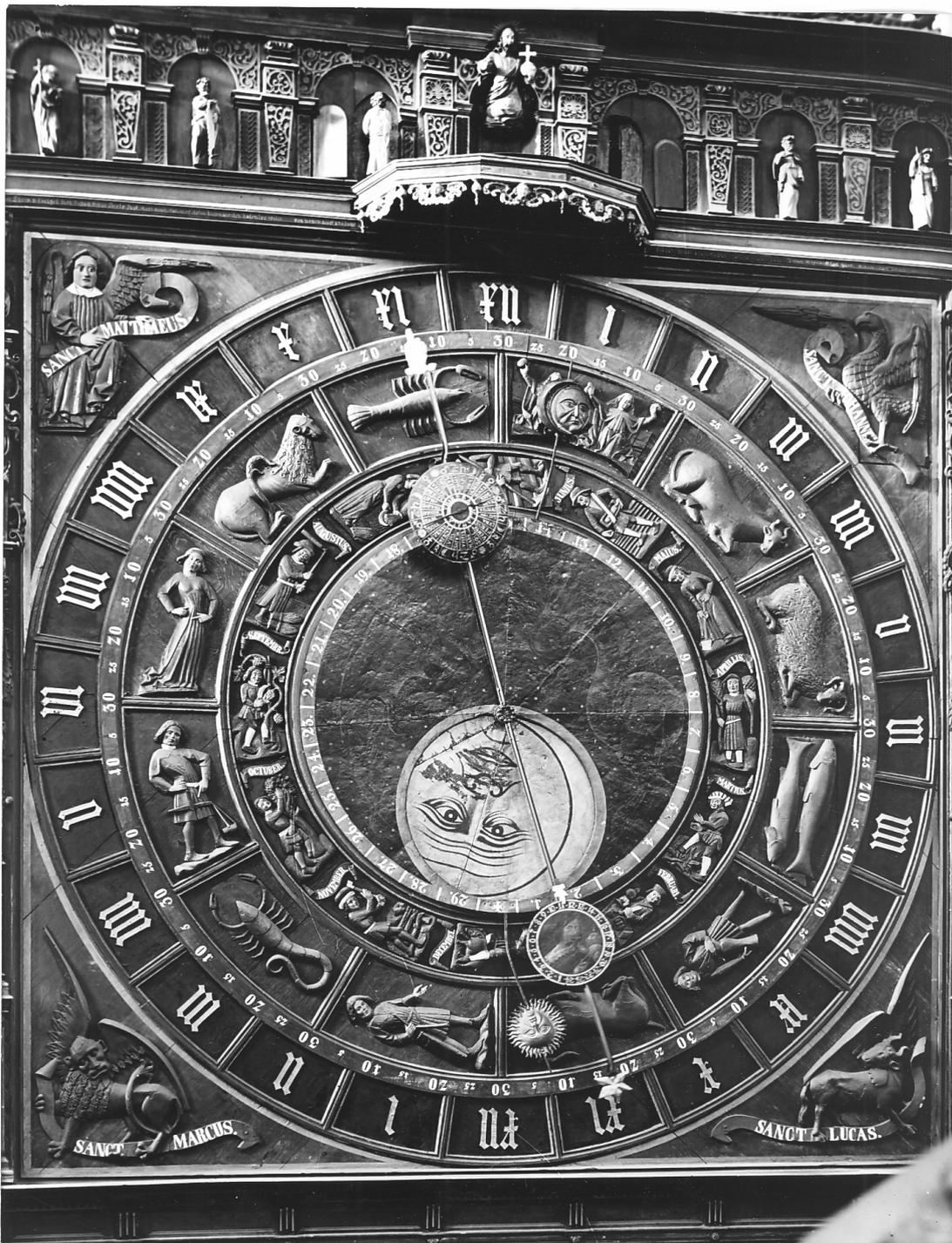
- (a) Das Getriebe ist wie beschrieben in Funktion, oder (a') es ist außer Betrieb gesetzt und dafür die Scheibe selbst durch ein Kontergewicht gleichstehend ausgerichtet.
- (b) Der rote Zeiger ist auf der Achse der Scheibe in konstantem Winkel zum Stundenzeiger fest montiert, oder (b') er ist drehbar auf der Achse gelagert, steht durch sein Eigengewicht stets vertikal.

In der Schrift [6] aus dem Jahre 1885 liest man, daß die Uhr bis 1835 in Funktion war, dann aber Stillstand erfolgte (wegen Bauarbeiten in der Kirche) bis zur Wiederherstellung 1885, dem ersten Jahr auf der Kalenderscheibe. Beschrieben wird „eine Scheibe mit einem Planetarium . . . , welche sich, von einem Contragewicht gehalten, mit der Bewegung des Stundenzeigers nach rechts (?) dreht“ (S. 8).

Diese Bewegungserklärung „mit Hilfe einer Gewichtsbeschwerung . . . genau nach dem Prinzip der Sebes-Scheibe“ (sie ist stets gleichstehend ausgerichtet) findet sich 1960 auch in [11] S. 26. Realisiert ist also zu diesen Zeiten die Funktionsweise (a').

Das bestätigen Fotografien von Karl ESCHENBURG aus dem Jahr 1936 [2], siehe nachfolgende Seiten, auf denen zu unterschiedlichen Stellungen des Stundenzeigers die Scheibe stets in derselben Ausrichtung zu sehen ist (Mond, Saturn, Jupiter unten, man vergleiche auch den Schriftzug HORAS PLANETARUM nahe des Zentrums der Scheibe). Andererseits aber zeigen die Aufnahmen den roten Zeiger in konstantem Winkel zum Stundenzeiger, realisiert ist Funktionsweise (b).

Die Kombination (a',b) bewirkt, daß sich der Zeiger in 24h einmal über alle 28 Sektoren der Scheibe hinwegdreht, und zwar rechtsherum, d.h. entgegengesetzt zur eingangs notierten Reihenfolge der Gestirne.



Aus [2] 1936, mit freundlicher Erlaubnis des Eigentümers

Bei der umfangreichen Restaurierung 1976 (s. [3]) wurde die „Außerbetriebsetzung des Getriebes hinter der Planetenscheibe und Anbringung eines Kontergewichtes am Rand der Planetenscheibe“ korrigiert in Funktionsweise (a). Leider folgt: „Richtig ist, dass der Zeiger durch Eigengewicht stets senkrecht steht“, also Funktionsweise (b'), von der auch in [12] (S. 33) gesprochen wird. In [13] (S. 11) ist die heutige Realisierung (b) erstmals publiziert.



Aus [2] 1936, mit freundlicher Erlaubnis des Eigentümers

Einsicht 5 Im $\frac{24}{28}$ -Getriebe der Planetenstunden-Scheibe vollführt das 24er-Antriebsrad in 24h auf seiner Drehachse eine volle Linksdrehung (wegen der Ausrichtung durch das Kontergewicht, bei vollem Rechtsumlauf des Stundenzeigers).

Die Scheibe dreht sich dadurch (mit dem 28er-Rad) auf ihrer Achse rechtsherum, und zwar in 24h um 24 ihrer 28 Sektoren.

Wenn der rote Zeiger dabei fest zur Scheibenachse steht, so drehen sich unter ihm pro Tag 24 Stundenregenten hindurch, die auf der Scheibe linksherum aufeinanderfolgen.

Bei der Realisierung (a, b') jedoch kommt zur Rechtsdrehung der Scheibe eine volle Linksdrehung des hängenden Zeigers pro Tag auf derselben Achse hinzu, pro Stunde wandern unter dem Zeiger zusätzlich $\frac{28}{24}$ Sektoren, insgesamt mehr als zwei hindurch. (Wahrnehmung dieses Effekts gab 1999 den ersten Anstoß zur vorliegenden Ausarbeitung.) Die Festsetzung des roten Zeigers auf der Scheibenachse und somit die nach Einsicht 5 sinnvolle Realisierung (a, b) sowie eine zutreffende Ersteinstellung des Stundenregenten erfolgten am 28. Juni 2001. *Nach Quellenlage ist ab diesem Datum erstmals seit 1835 die Anzeige der Stundenregenten wieder adäquat.*

4 Überlegungen zu gelegentlich erforderlichen Justierungen

An einem Schalttag sollte die obere Uhr normal weitergehen, damit sich einerseits der Modell-Mond wie erforderlich fortbewegt und andererseits der Zyklus für die Stundenregenten auf der Planetenstunden-Scheibe korrekt fortsetzt. Dadurch gewinnt die Modell-Sonne jedoch einen Tag (Einsicht 1). Dies ist zwar zunächst unerheblich, würde sich aber nach mehrmaliger Wiederholung schließlich doch zeigen. Weil nun aber der Modell-Mond in vier Jahren mehr als $18h$ verliert (Einsicht 4), liegt seine Justierung nahe, und dies könnte in jedem Schaltjahr dann gleich gemeinsam mit der Modell-Sonne (an weitgehend beliebigem Tag) erfolgen, so laute hier der Vorschlag mit den nachfolgenden Überlegungen dazu. (Für die Kalenderscheibe der unteren Uhr, die keinen 29.2. führt, muß die Weiterschaltung einen Tag unterbrochen werden, um auf ihr die richtige Datumsanzeige zu sichern.)

Zur Einstellung des Modell-Mondes unabhängig vom übrigen Uhrwerk gibt es die erwähnte Möglichkeit, ihn zwischen seinem 21er- und 82er-Antriebsrad zu entkoppeln. Dann läßt er sich um eine zu wählende Anzahl von Zähnen seines 82er-Rades, aber nicht anders, neu einstellen. Welcher Zeitspanne entspricht dabei 1 Zahn des 82er-Rades? Die Neueinstellung geschieht entlang des nun stillstehenden, konzentrisch gelagerten Jahresrades der Modell-Sonne, und darum entspricht eine volle Drehung um 82 Zähne einem modellierten synodischen Mond b_M ($= \frac{29930}{1013}d = \frac{82 \cdot 365 \cdot 24}{1013}h = 82 \cdot \frac{8760}{1013}h$, Einsicht 4). Somit folgt:

Einsicht 6 *Das Zeitäquivalent pro Zahn des 82er-Rades bei Entkopplung ist*

$$\frac{8760}{1013}h (= 8h 38,85 \dots m \approx 8h 39m).$$

Man beachte den Unterschied zu Einsicht 2.

In vier Jahren verliert der Modell-Mond $18h 11m$ (Einsicht 4); hinzu kommt ein *vierjähriger durchschnittlicher vorzeichenbehafteter Rückstand* D zum Naturmond, wir setzen $S := D + 18h 11m$.

Um S müßte der Modell-Mond vorverstellt werden, damit in der nächsten Vierjahresperiode, in der er wiederum $18h 11m$ verlieren wird, sein durchschnittlicher Rückstand Null wäre.

Die Prozedur der Justierung beginne vor Entkopplung des Modell-Mondes mit Rückstellung der Modell-Sonne um einen Tag, durch entsprechende Rückdrehung am seinerseits entkoppelbaren 24h-Rad, dem Antriebsrad des Stundenzeigers.

Die Planetenstunden-Scheibe ist dann um eine erzwungene ‚volle‘ Rechtsdrehung, die das Kontergewicht überwindet, wieder auf den richtigen Wochentag vorzustellen.

Durch diese Rückstellung des Werkes vergrößert sich der Rückstand des Modell-Mondes künstlich zunächst um weitere 24h, die zusammen mit S nun bei seiner Entkopplung auszugleichen wären. Die hierfür zu wählende Anzahl von Zähnen bestimmt sich aus dem Verhältnis zum Zeitäquivalent $8h\ 39m$ pro Zahn:

Ist $l := \frac{S+24h}{8h\ 39m}$, und ist k die ganzzahlige Rundung von l (d.h. $-\frac{1}{2} \leq l - k < \frac{1}{2}$), so werde der entkoppelte Modell-Mond um k Zähne seines 82er-Rades vorgestellt. (Man täusche sich über Unbequemlichkeiten bei der Wiedereinkopplung nicht, sie bedarf guter Vorbereitung.)

Hierdurch vermindern sich alle anstehenden Zeiten für den Modell-Mond um $Z := k \cdot 8h\ 39m - 24h$, die künstliche Erhöhung um 24h, die in k enthalten ist, muß nämlich annulliert werden. Gewünscht war, daß $D' := S - Z = D + 18h\ 11m - Z$ zu Null würde, daß durchschnittlicher Rückstand D sowie 4jähriger Verlust ausgeglichen worden wären. Dies aber kann kaum je eintreten, und daher ändert sich, nach Ausgleich des 4jährigen Verlustes, der Durchschnitt D in den neuen 4jährigen Durchschnitt D' .

Nun ist $S + 24h = l \cdot 8h\ 39m$ und $Z + 24h = k \cdot 8h\ 39m$, somit $D' = S - Z = (l - k) \cdot 8h\ 39m$, also $-4h\ 20m < D' < 4h\ 20m$.

Einsicht 7 *Wird der entkoppelte Modell-Mond nach vier Jahren bei geschilderter Prozedur um k Zähne vorgestellt, so kommt er zukünftig um $Z := k \cdot 8h\ 39m - 24h$ eher.*

Der bisherige durchschnittliche Rückstand D zum Naturmond verändert sich um $18h\ 11m - Z$ zum neuen vierjährigen Durchschnitt $D' := D + 18h\ 11m - Z (= S - Z)$.

Die Einstellung ist bestmöglich, falls D' absolut kleiner als $4h\ 20m$ ist.

Empfehlung für 2008:

Es ist $D = 26m$ in den Jahren 2004–07 (s. Ende Abschnitt 2.3),

$$S = D + 18h\ 11m = 18h\ 37m, \quad l = \frac{18h\ 37m + 24h}{8h\ 39m} = 4,92\dots, \quad \text{somit } \underline{k = 5};$$

dann wird $Z = 5 \cdot 8h\ 39m - 24h = 19h\ 15m$, $18h\ 11m - Z = -1h\ 4m$ und $D' = D - 1h\ 4m = 26m - 1h\ 4m = -38m$ für 2008–11.

Am 21.6.2001 (Sommeranfang, Neumond) wurden Modell-Sonne und Modell-Mond, der einen Rückstand von mehreren Tagen aufwies, neu eingestellt, und zwar noch nach Augenschein. Später wieder auftretende Abweichungen verwunderten zunächst, und führten zu Überlegungen mit den geschilderten Einsichten.

Am 5.3.2004 erfolgte erstmals eine Justierung nach obiger Prozedur (mit $k = 6$). Damals galt $D = 10h\ 6m$ für den zurückliegenden 4jährigen durchschnittlichen Rückstand. Obwohl also drei Jahre zuvor der Modell-Mond vermeintlich bestmöglich eingestellt wurde, war dies nicht gelungen.

5 Schlußbemerkungen, ein Blick in die Zukunft

Konkrete Neu- und Vollmondzeiten des Modell-Mondes in diesen Ausführungen beziehen sich auf die Stellungen der Gesichter, die im Ausschnitt der Sonnenscheibe sichtbar werden. Das Mondsymbol geht leider nicht gänzlich konform hiermit, insbesondere bei Neumond wird erkennbar, daß es dem Sonnensymbol etwas voraus ist. Hierfür sollte bei künftiger Restauration eine Korrektur angestrebt werden. (Aufnahmen [2] zeigen einen gekrümmten Sonnenzeiger, s. Bilder in Abschnitt 3, wodurch dieser Effekt geringer gewesen sein könnte.)



Vollmond an der Uhr, 30.7.2007 5:00



Neumond an der Uhr, 13.8.2007 17:50

Zahlreiche Beobachtungen erhellten außerdem, daß sich Neu- und Vollmondgesicht auf der bemalten Scheibe nicht genau gegenüberstehen: Von Neumond bis Vollmond sind es ca. $15d$, von Vollmond bis Neumond ca. $14d\ 13h$. Letztlich konnten die Daten so präzisiert werden, daß nun stets eine zutreffende Fortberechnung (s. Einsicht 4) möglich ist.

Bei nochmaliger Betrachtung von Einsicht 7 und der Empfehlung für 2008 sieht man, daß mit $k = 5$ stets $18h\ 11m - Z = -1h\ 4m$ gilt. Der Vierjahresdurchschnitt D ändert sich somit bei nachfolgenden vierjährigen Justierungen mit $k = 5$ immer um diesen selben Wert, und

solange D größer als $-4h\ 20m$ bleibt, ist $k = 5$ richtig gewählt. Mit $D = -38m$ für 2008–11 trifft dies nach entsprechender Justierung 2012 zu, auch noch 2016 und 2020, hier mit $D = -3h\ 50m$ für 2020–23.

Dann ist 2024 zur Justierung $k = 4$ richtig mit $Z = 4 \cdot 8h\ 39m - 24h = 10h\ 36m$, $18h\ 11m - Z = 7h\ 35m$ und neuem $D = -3h\ 50m + 7h\ 35m = 3h\ 45m$ für 2024–27.

Danach kommen wieder Verminderungen um $1h\ 4m$ – wenn denn das Uhrwerk, wie durch geschickte Hände jetzt, seine gute Pflege behält.

Angemessenes Justieren ist hiernach über eine längere Zeitspanne hinweg klar, die prognostizierten Werte sind grundsätzlich dem Werk immanent. Das Einbeziehen der Modell-Sonne rät für die Justierungen zu einem Vierjahresrhythmus; häufigeres Justieren könnte u. U. Durchschnittsabweichungen verbessern, aber dies immer nur kurzzeitig und jeweils auch nur in Schritten von $8h\ 39m$, dem Zeitäquivalent für einen Zahn des 82er-Rades. Darum bleibt eine Beurteilung der Einstellungen mittels vierjähriger Rückstandsdurchschnitte und ihrer Lage innerhalb des allgemein bestmöglichen Intervalls I von $-4h\ 20m$ bis $4h\ 20m$ (s. Einsicht 7) unsere Grundlage.

Das empfohlene Vorgehen wird auch davon nicht berührt, daß die in den Rechnungen verwendeten Größen $18h\ 11m$ und $8h\ 39m$ (s. Einsicht 4 bzw. 6) gerundet wurden, ihre Rundungsfehler wirken sich auf die Vorschläge bis in weitere Zukunft nicht aus: Es gilt

$$18h\ 11m < (b_M - b) \cdot \frac{4 \cdot 365 + 1}{b} d < 18,1841h, \quad 8,6475h < \frac{8760}{1013}h < 8h\ 39m.$$

Daraus folgt für die wahren Änderungen Δ_k des Durchschnitts D bei Justierungen um k Zähne (s. Einsicht 7)

$$18h\ 11m - (k \cdot 8h\ 39m - 24h) < \Delta_k < 18,1841h - (k \cdot 8,6475h - 24h),$$

speziell bei $k = 5$ bzw. 4

$$-1h\ 4m < \Delta_5 < -1,053h \quad \text{bzw.} \quad 7h\ 35m < \Delta_4 < 7,595h.$$

Ab 2004–07, d.h. der Justierung 2008 gerechnet, ergibt sich für den wahren Wert von D im Zeitraum 2024–27 bei den oben genannten Prozeduren deshalb

$$3h\ 45m < 26m + 4 \cdot \Delta_5 + 1 \cdot \Delta_4 = D < 3,817h < 3h\ 50m,$$

D liegt im soeben bezeichneten Intervall I , und für alle vorhergehenden (kleineren) Durchschnitte sichern dies ja schon die früheren Werte (als gültige untere Abschätzungen).

Bedenkt man noch $7m < 7 \cdot \Delta_5 + 1 \cdot \Delta_4 < 0,224h$ ($\approx 13,5m$), so erhöhen demnach 7 vierjährige Justierungen mit $k = 5$ und eine mit $k = 4$ zusammen in 32 Jahren den Durchschnitt D

um einen Wert innerhalb der genannten Schranken. Bei zweimaligem derartigen Vorgehen ab 2024–27 würde sogar für 2088–91 hochgerechnet gelten

$$3h\ 45m + 2 \cdot 7m = 3h\ 59m < D < 3,817h + 2 \cdot 0,224h = 4,265h < 4h\ 16m,$$

auch dieses größte D der gesamten Abfolge läge noch in I , aber ebenso alle anderen, denn das kleinste unter ihnen (nach 7 Justierungen mit $k = 5$) wäre größer als

$$3h\ 45m + 7 \cdot (-1h\ 4m) = -3h\ 43m.$$

In den Jahren 2092 und 96 wäre wieder $k = 5$ zu wählen, das Nicht-Schaltjahr 2100 dann würde eine eigene Prozedur erfordern ..., wenn nicht künftige Interessierte andere Modi bevorzugt haben werden.

Allerdings wurde der Ausgangswert $D = 26m$ für 2008, auf dem die Rechnungen basieren, lediglich aus Stützstellen der kontinuierlichen ‚Rückstandsfunktion‘ ermittelt, theoretisch wäre ein Integralmittelwert einzusetzen. Solche Untersuchungen erscheinen jedoch im anstehenden Rahmen als irrelevant.

Über eine einfache technische Realisierung, die bereits eine Möglichkeit für sporadische Korrekturen enthält, zeigt die Uhr ihren Besuchern Abbilder des natürlichen Sonnen- und Mondlaufs, und diese sind unter geeigneten vierjährlichen Korrekturen so zutreffend, daß unvermeidliche Abweichungen nur bei gezieltem Vergleich wahrgenommen werden können.

Im Jahr 2017, es ist das Jahr des 500jährigen Reformationsjubiläums, enden auf der großen Kalenderscheibe die ab 1885 geltenden jahrbezogenen Angaben, z.B. die Osterdaten, die Scheibe muß zumindest an diesen Stellen erneuert werden, erforderliche neue Daten liegen seit 1994 vor ([13] S. 20). Auch weitere Restaurationen, so an den Scheiben mit Sonnen- und Mondsymbol, sind sicherlich nötig, um die Uhr als einzigartiges Kulturdenkmal nicht zu gefährden. Hoffen wir, daß gut informierte, wohlgesinnte Verantwortliche hierfür die erforderliche pekuniäre Ausstattung bereithalten.

Ab 2018, dem Jahr des 800jährigen Jubiläums unserer Hansestadt, sollten die neuen Angaben der Kalenderscheibe gelten, und 2019 feiert die Universität Rostock ihr 600jähriges Bestehen, vermutlich auch in St. Marien – wo sie einst gegründet wurde.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn D. Neßelmann für die kritische Durchsicht des ersten Entwurfes und damit verbundene zielgerichtete Anregungen sowie Herrn M. Berger für die aktuellen Fotografien.

Literatur

- [1] **Deschauer, S.** : *Die Osterfestberechnung - Astronomie und Tradition formen einen Algorithmus.* Didaktik der Mathematik **1**, 68-84 (1986)
- [2] **Eschenburg, K.** : *Rostocks astronomische Uhr, ein technisches Kulturdenkmal.* Rostocker Illustrierte, Wochenbilder des Rostocker Anzeigers vom 1.1.1937, *Fotografien aus dem Jahre 1936.* Universitätsarchiv Rostock, „Photo-Eschenburg-Archiv“
- [3] **Gummelt, W.** : *Restaurierungsbericht astronomische Uhr Rostock Marienkirche.* Institut für Denkmalpflege Schwerin, Eingang 5.7.1976
- [4] **Herrmann, J.** : *dtv-Atlas Astronomie.* 14. Aufl., München: DTV 2000
- [5] **Lichtenberg, H.** : *Das anpassbar zyklische, solilunare Zeitählungssystem des gregorianischen Kalenders.* Math. Semesterber. **50**, 45-76 (2003)
- [6] **Mann, A.** : *Beschreibung der astronomischen Uhr in der St. Marienkirche zu Rostock.* Rostock 1885
- [7] **Meeus, J.** : *Astronomische Algorithmen.* 2. Aufl., Leipzig: Barth 1994
- [8] **Mütz, K.** : *Faszination Kalender.* Buxheim: Polygon 1996
- [9] **Perron, O.** : *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band I.* 3. Aufl., Stuttgart: Teubner 1954
- [10] **Peterson, I.** : *Was Newton nicht wußte.* Basel: Birkhäuser 1994
- [11] **Preiss, H.** : *Die astronomische Uhr in der St. Marienkirche zu Rostock.* Monatsschrift Feinmechanik und Optik 77, Heft 1, 24-28 (1960)
- [12] **Schukowski, M.** : *Die Astronomische Uhr in St. Marien zu Rostock.* Königstein im Taunus: Langewiesche, Köster 1992
- [13] **Schukowski, M.** : *Die astronomische Uhr der St.-Marien-Kirche zu Rostock.* Stiftung St.-Marien-Kirche e.V. 2004
- [14] **Warm, H.** : *Die Signatur der Sphären.* 2. Aufl., Hamburg: Keplerstern 2004
- [15] **Wisliceny, J.** : *Grundbegriffe der Mathematik II.* Berlin: DVW 1974
- [16] **Drews, K.-D.** : *Berechnungen zum Eintritt von Neumond und Vollmond an der Astronomischen Uhr der Rostocker Marienkirche für die Jahre 2000 bis 2008.* Mskr., jahresweise

eingegangen: 5. Oktober 2007

Autor:

Klaus-Dieter Drews, i. R.
Universität Rostock
Institut für Mathematik
18051 Rostock
Germany