Rostock. Math. Kolloq. **58**, 47–52 (2004)

Subject Classification (AMS)
**54A05,54B20,54D30,54E15,
54E52**

Gerhard Preuss

Hyperräume – von den Ideen Hausdorff's bis in die Gegenwart

Herrn Professor Harry Poppe anläßlich seines 70. Geburtstages gewidmet

---

Ist **X** ein Raum (z.B. ein metrischer Raum, ein topologischer Raum, ein uniformer Raum oder ein semiuniformer Konvergenzraum), so ist ein **Hyperraum** von **X** (Bezeichnung: $H(\mathbf{X})$) ein Raum, dessen Punkte geeignete Teilmengen von **X** sind und in den **X** eingebettet werden kann (evtl. unter zusätzlichen Bedingungen). Man sagt, daß die Einbettung von **X** in $H(\mathbf{X})$ irgend eine Eigenschaft E bewahrt (bzw. reflektiert), wenn $H(\mathbf{X})$ (bzw. **X**) die Eigenschaft E besitzt, falls **X** (bzw. $H(\mathbf{X})$) die Eigenschaft E besitzt.
Hyperräume metrischer Räume sind erstmals 1914 von F. Hausdorff [6, S. 290ff] betrachtet worden:
Ist (X, d) ein metrischer Raum, so wird auf

$$\mathcal{F}(X) = \{E \subset X : E \text{ nicht-leer, abgeschlossen und beschränkt}\}$$

eine Metrik d_H definiert durch

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}.$$

d_H heißt **Hausdorff-Metrik**. Sind a, b Elemente von X , so gilt

$$d_H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)\,,$$

d.h. $i : (X, d) \to (\mathcal{F}(X), d_H)$, definiert durch $i(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$, ist eine metrische Einbettung.
Häufig wird für die Hausdorff-Metrik folgende äquivalente Formulierung benutzt:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{U}_d(B, \varepsilon) \text{ und } B \subset \mathcal{U}_d(A, \varepsilon)\}\,,$$

wobei $\mathcal{U}_d(C, \delta) = \{x \in X : d(x, c) < \delta$ für irgendein $c \in C\}$, falls $\delta > 0$ und $C \subset X$, d.h. $\mathcal{U}_d(C, \delta)$ ist die Vereinigung aller offenen δ-Kugeln um c für jedes $c \in C$.

Der **Satz von Hahn** (1932) besagt, daß *für jeden vollständigen metrischen Raum* (X, d) *der Hyperraum* $(\mathcal{F}(X), d_H)$ *vollständig* ist (s. [5]).
Bereits 1922 hat L. Vietoris [14] Hyperräume topologischer Räume studiert: Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{X})$ bezeichne $\mathcal{A}(X)$ die Menge aller nicht-leeren, abgeschlossenen Teilmengen von X . Dann ist

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_k\rangle : (U_i)_{i\in\{1,\dots,k\}} \text{ endliche Folge offener Teilmengen von } (X, \mathcal{X})\}$$

Basis einer Topologie $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ auf $\mathcal{A}(X)$ (d.h. jede in $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(\mathcal{X}))$ offene Menge ist Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$), wobei

$$\langle U_1, \dots, U_k\rangle = \{B \in \mathcal{A}(X) : B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ und } B \cap U_i \neq \emptyset \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

$(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(\mathcal{X}))$ heißt **Vietoris'scher Hyperraum** von $(X, \mathcal{X})$. Falls $(X, \mathcal{X})$ T_1-Raum ist (d.h. die einpunktigen Teilmengen von $(X, \mathcal{X})$ sind abgeschlossen), ist
$i : (X, \mathcal{X}) \to (\mathcal{A}, (X), \mathcal{A}(\mathcal{X}))$, definiert durch $i(x) = \{x\}$, eine topologische Einbettung, d.h. $(X, \mathcal{X})$ ist Unterraum seines Hyperraumes.
Der Zusammenhang zwischen dem Hausdorff'schen und dem Vietoris'schen Ansatz ist gegeben durch folgendes

Lemma *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und*

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \textit{ nicht-leer und kompakt}\}.$$

Dann stimmt die von der Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{K}(X)$ *induzierte Topologie mit der Vietoris-Topologie auf* $\mathcal{K}(X)$ *überein.*

Für den Fall, daß $(X, \mathcal{X})$ ein T_1-Raum ist, hat E. Michael [8] 1951 einige topologische Invarianten angegeben, die von der Einbettung von $(X, \mathcal{X})$ in den Vietoris'schen Hyperraum $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}, (\mathcal{X}))$ bewahrt und reflektiert werden:

1) quasikompakt (bzw. kompakt),

2) lokal kompakt

3) separabel.

Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so stimmen $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{A}(X)$ und $\mathcal{K}(X)$ überein und aufgrund obigen Lemmas ist, falls $\mathcal{X}_d$ die von d induzierte Topologie bezeichnet, $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(\mathcal{X}_d))$ ein kompakter topologischer Raum, der durch die Hausdorff-Metrik metrisiert werden kann.

Bekanntlich heißt ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ein *Peano-Raum*, wobei ein Kontinuum wie üblich ein kompakter, zusammenhängender metrischer Raum ist.
Unter der Voraussetzung, daß X ein Kontinuum ist, haben 1923 L. Vietoris [15] ("$\Leftarrow$") und T. Wazewski [16] ("$\Rightarrow$") gezeigt:

$$\mathcal{A}(X) \text{ Peano-Raum } \Leftrightarrow X \text{ Peano-Raum}$$

(Der Satz von Hahn/Mazurkiewicz besagt, daß ein Hausdorff-Raum genau dann ein Peano-Raum ist, wenn er stetiges Bild des Einheitsintervalls $[0,1]$ ist.)
Ebenfalls unter der Voraussetzung, daß X ein Kontinuum ist, haben 1974 D. W. Curtis und R. M. Schori [4] folgendes tiefliegendes Resultat erzielt (durch Anwendung der Methoden der unendlich-dimensionalen Topologie):

> $\mathcal{A}(X)$ *ist homöomorph zum Hilbert-Quader genau dann, wenn* X *ein Peano-Raum mit mehr als einem Punkt ist.*

(Der Hilbert-Quader ist das Produkt von abzählbar vielen Kopien des Einheitsintervalls $[0,1]$).
Uniforme Konzepte, die für metrische Räume einen Sinn ergeben, wie etwa Vollständigkeit, können in topologischen Räumen nicht erklärt werden. Deshalb wurden 1937 von A. Weil [17] uniforme Räume als Verallgemeinerung metrischer Räume eingeführt. 1940 definierte N. Bourbaki [2, p. 97, ex. 7)] Hyperräume uniformer Räume wie folgt:
Ist $(X, \mathcal{V})$ ein separierter uniformer Raum (d.h. der zugrundeliegende topologische Raum ist Hausdorff'sch), bezeichnet $\mathcal{A}$ die Menge der nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von X und setzt man für jedes $V \in \mathcal{V}$

$$H(V) = \{(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : A \subset V[B] \text{ und } B \subset V[A]\},$$

so ist $\{H(V) : V \in \mathcal{V}\}$ Basis einer Uniformität $H(\mathcal{V})$ für $\mathcal{A}$. Es gilt:

(1) $i : (X, \mathcal{V}) \to (\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$, definiert durch $i(x) = \{x\}$, ist eine uniforme Einbettung,

(2) $(\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$ ist separiert.

$(\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$ heißt der **uniforme Hyperraum** von $(X, \mathcal{V})$.
Ist $(X, \mathcal{V})$ ein metrisierbarer uniformer Raum (d.h. es gibt eine Metrik auf X , die o.B.d.A. als beschränkt angenommen werden kann, so daß

$$V \in \mathcal{V} \;\Leftrightarrow\; \text{Es existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\} \subset V),$$

so ist $(\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$ metrisierbar mit Hilfe der Hausdorff-Metrik d_H. Falls $(X, \mathcal{V})$ außerdem vollständig ist, ist aufgrund des Satzes von Hahn auch $(\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$ vollständig, allerdings:

$(\mathcal{A}, H(\mathcal{V}))$ ist i.a. selbst dann **nicht** vollständig, wenn $(X, \mathcal{V})$ ein vollständiger uniformer Raum ist (vgl. dazu J. Isbell [7]).
Im vergangenen Jahrhundert sind viele Versuche unternommen worden, topologische und (oder) uniforme Räume zu verallgemeinern. Ein besonders nützliches Konzept stellen die semiuniformen Konvergenzräume dar, die sowohl topologische als auch uniforme Aspekte in voller Allgemeinheit berücksichtigen (vgl. hierzu G. Preuß [12]).

[Zur Erinnerung: Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist ein Paar $(X, \mathcal{J}_X)$, wobei X eine Menge und $\mathcal{J}_X$ eine Menge von Filtern auf $X \times X$ ist derart, daß gelten:

$UC1)$ $\dot{x} \times \dot{x} = \{M \subset X \times X : (x,x) \in M\} \in \mathcal{J}_X$ für alle $x \in X$

$UC2)$ $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$, falls $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

$UC3)$ $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ impliziert $\mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$,
wobei $F^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in F\}$]

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine Menge von nicht-leeren Teilmengen eines semiuniformen Konvergenzraumes $(X, \mathcal{J}_X)$ derart, daß $\{x\} \in \mathcal{A}$ für jedes $x \in X$. Wird eine injektive Abbildung $i : X \to \mathcal{A}$ definiert durch $i(x) = \{x\}$ für jedes $x \in X$, so setze man $i[X] = X'$ und nehme o.B.d.A. an, daß $X = X'$ ist, d.h. i ist eine Inklusionsabbildung. Auf $\mathcal{A}$ werde eine semiuniforme Konvergenzstruktur $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f = \{&\mathcal{H} \in F(\mathcal{A} \times \mathcal{A}) : (i \times i)^{-1}(\mathcal{A}) \text{ existiert und gehört zu } \mathcal{J}_X \\ &\text{oder } (i \times i)^{-1}(\mathcal{A}) \text{ existiert nicht}\}, \end{aligned}$$

wobei $F(\mathcal{A} \times \mathcal{A})$ die Menge aller Filter auf $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ bezeichnet. Dann ist $(X, \mathcal{J}_X)$ ein Unterraum von $(\mathcal{A}, \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f)$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f$ ist die gröbste semiuniforme Konvergenzstruktur auf $\mathcal{A}$ mit dieser Eigenschaft. $(\mathcal{A}, \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f)$ heißt **finaler Hyperraum** von $(X, \mathcal{J}_X)$.

Satz [13, 1.8] *Für jeden semiuniformen Konvergenzraum $(X, \mathcal{J}_X)$ ist der finale Hyperraum $(\mathcal{A}, \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f)$ vollständig, falls $\mathcal{A} \setminus X$ nicht leer ist, und enthält X als dichte Teilmenge, d.h. er ist eine Vervollständigung von $(X, \mathcal{J}_X)$.*

Ist $(X, \mathcal{V})$ ein separierter uniformer Raum sowie $(X, [\mathcal{V}])$ sein entsprechender semiuniformer Konvergenzraum, d.h. $[\mathcal{V}] = \{\mathcal{F} \in F(X \times X) : \mathcal{F} \supset \mathcal{V}\}$, und besteht $\mathcal{A}$ aus allen nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von X, so ist $(\mathcal{A}, [H(\mathcal{V})])$ ein separierter semiuniformer Konvergenzraum, der $(X, [\mathcal{V}])$ als Unterraum enthält. Folglich ist $[H(\mathcal{V})]$ feiner als $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f$, d.h. $[H(\mathcal{V})] \subset \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f$. Der finale Hyperraum $(\mathcal{A}, \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^f)$ braucht jedoch nicht uniform zu sein, wie folgendes *Beispiel* zeigt: Sei $\mathcal{V}$ die diskrete Uniformität auf $\{0, 1\}$. Dann besteht die Menge $\mathcal{A}$

aller abgeschlossenen nicht-leeren Teilmengen von $(\{0,1\},\mathcal{V})$ aus genau drei Elementen. Es gibt jedoch keine gröbste Uniformität auf $\mathcal{A}$, die $\mathcal{V}$ induziert (vgl. [12, 3.2.7.②]).
Die Einbettung eines semiuniformen Konvergenzraumes in seinen finalen Hyperraum bewahrt und reflektiert u.a. die Eigenschaften "semiuniform *" und "präkompakt", und sie bewahrt "kompakt", "zusammenhängend" und "uniform zusammenhängend" (vgl. [13]).
Seit längerem werden auch Zusammenhänge zwischen Hyperräumen und Funktionenräumen studiert (vgl. hierzu S. A. Naimpally [10]). Ein jüngeres Resultat von T. Mizokami ([9]) besagt, daß für Hausdorff-Räume X, Y die Menge $C(X,Y)$ der stetigen Abbildungen zwischen X und Y, versehen mit der kompakt-offenen Topologie, abgeschlossen eingebettet werden kann in $C(\mathcal{K}(X),\mathcal{K}(Y))$, versehen mit der punktweisen Konvergenz, wobei $\mathcal{K}(X)$ (bzw. $\mathcal{K}(Y)$) die Menge der nicht-leeren kompakten Teilmengen von X (bzw. Y) ist, versehen mit der Vietoris-Topologie. Durch Ausweitung der Ideen von Mizokami gelingt es schließlich R. Bartsch [1], einem Schüler von H. Poppe, im Jahre 2002 Sätze vom Ascoli-Typ zu beweisen, d.h. Kompaktheitskriterien in Funktionenräumen zu entwickeln. In diesem Zusammenhang muß auch das Buch "Compactness in General Function Spaces" von H. Poppe [11] erwähnt werden, das internationale Beachtung gefunden hat und in das eigene Ergebnisse von H. Poppe zum Ascoli-Satz eingeflossen sind.

Literatur

[1] **Bartsch, R. :** *Compactness Properties for some Hyperspaces and Function Spaces.* Inaugural-Dissertation, Universität Rostock 2002

[2] **Bourbaki, N. :** *Topologie générale.* Chapitres 1 et 2, Hermann, Paris 1940

[3] **Čech, E. :** *Topological Spaces.* Revised edition by M. Frolik and M. Katětov, Interscience, London 1966

[4] **Curtis, W. D.** und **Schori, R. M. :** 2^X *and* $C(X)$ *are homeomorphic to the Hilbert cube.* Bull. Am. Math. Soc. **80**, 927–931 1974

[5] **Hahn, H. :** *Reelle Funktionen.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932

[6] **Hausdorff, F. :** *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig 1914

[7] **Isbell, J. :** *Supercomplete spaces.* Pacific J. Math. **12**, 287–290 1962

[8] **Michael, E. :** *Topologies on spaces of subsets.* Trans. Amer. Math. Soc. **42**, 152–182 1951

*Semiuniforme Räume sind ausführlich im Buch "Topological Spaces" von E. Čech [3] dargestellt.

[9] **Mizokami, T. :** *The embedding of a mapping space with compact open topology.* Top. Appl. **82**, 355–358 1998

[10] **Naimpally, S. A. :** *Hyperspaces and function spaces.* Q & A in General Topology **9**, 33–60 1991

[11] **Poppe, H. :** *Compactness in General Function Spaces.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974

[12] **Preuß, G. :** *Foundations of Topology.* Kluwer, Dordrecht 2002

[13] **Preuß, G. :** *A Hyperspace Completion for Semiuniform Convergence Spaces and Related Hyperspace Structures.* Preprint Nr. A-02-03, FB Mathematik und Informatik, FU Berlin 2003

[14] **Vietoris, L. :** *Bereiche zweiter Ordnung.* Monatshefte für Math. und Phys. **32**, 258–280 1922

[15] **Vietoris, L. :** *Kontinua zweiter Ordnung.* Monatshefte für Math. und Phys. **33**, 49–62 1923

[16] **Wazewski, T. :** *Sur un continu singulier.* Fund. Math. **4**, 214–245 1923

[17] **Weil, A. :** *Sur les espaces à structures uniformes et sur la topologie générale.* Hermann, Paris 1937

eingegangen: 30. Mai 2003

Autor:

Gerhard Preuß
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Arnimallee 3
D-14195 Berlin

e-mail: preuss@math.fu-berlin.de